(*) Ya demostré que si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base para $V \Rightarrow$ dado $v \in V$ existen escalares $a_1, \dots, a_n$ tq

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

Partir retomando esa idea.

- Definir $[v]_\beta$
- Hacer 3 ejemplos:

① $\mathbb{R}^2$ con $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\left[\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\beta$$

Determinar v tq $[v]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1) a) Si

$Ax + By + Cz = D$ es la ecuación $\Rightarrow$

$$A - 2B + C = D$$
$$2A - 3B = D$$
$$4A = D$$

$\Rightarrow$ la matriz es

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & -4 & 3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & -5 \end{matrix}$$

D libre $\quad C = 5D/12$

$$B = 2C - D = \frac{10D}{12} - \frac{12D}{12} = \frac{-D}{6}$$

$$A = 2B - C + D$$

$$A = -\frac{D}{3} - \frac{5D}{12} + D = \frac{-4-5+12}{12} D$$

$$= \frac{1}{4} D$$

Si $D = 12$

$\Rightarrow A = 3 \qquad B = -2$

$C = 5 \qquad D = 12$

$$3x - 2y + 5z = 12$$

1 pto x plantear mecanismo de solución

1 pto x resolver

1 pto x ecuación

b) Observe que la recta perdida tiene dirección $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\therefore$
$$\left.\begin{aligned} x &= 1+3t \\ y &= 1-2t \\ z &= 1+5t \end{aligned}\right\}$$

(1 pto) por determinar la dirección

(2pto) por la ecuación correcta

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ -3 & -7 & -1 & 11 & 4 \end{array}\right)$$

$$2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -7 & 14 & 4 \end{array}\right)$$

$$2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9/5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6/5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9/5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6/5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12/5 \end{array}\right)$$

→ inconsistente

$\Longrightarrow$ No pertenece al generado

b) Observe que la 3ª columna es sin pivote $\Longrightarrow$

La tercera columna de A es c.l. del resto de columnas, el resto de columnas forman un conjunto l.i. o.c. basta tomar

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & -7 & 11 \end{pmatrix}$$

de esta manera tendremos que

$$Bx=0$$

tiene solución trivial.

1pto por escalonar bien
1pto por concluir que el vector no pertenece al generado
2pts por justificación de li y ld

1 pto por la matriz B

(3)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a & 2 \\ a & 1 & a & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & (a^2-1) & a \end{array}\right]$$

$\sim$

$F_3 \to F_3 - aF_1$

$F_4 \to F_4 - F_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & 1-a & a-a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a^2-2 & a \end{array}\right)$$

Si $a=1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Si $a=1 \Rightarrow$ existe una variable libre y $\therefore$ la solución es una recta en $\mathbb{R}^4$. La ecuación es

$x_3 = t$ libre $t \in \mathbb{R}$

$x_4 = -1$

$x_2 = 2 - x_3 - x_4 = 3 - t$

$x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 = -3 + t - t + 1 = -2$

$$\left\{ t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Si $a \neq 1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & 1-a & a-a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a^2-2 & a \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & 1-a & a-a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a^2-2 & a \end{array}\right)$$

$\sim$ $\frac{1}{1-a}$ F_3

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a^2-2 & a \end{array}\right)$$

$\sim$ $F_3 - F_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & -a & -2 \\ 0 & 0 & 1-a & a^2-2 & a \end{array}\right)$$

$\sim$ $F_4 + F_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & -a & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-a-2 & a-2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & -a & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-a-2 & a-2 \end{array}\right)$$

Como $a \neq 1$ $\quad \frac{1}{a-1} F_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-a}{a-1} & -2/a-1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a^2-a}{-2} & a-2 \end{array}\right)$$

$\rightarrow a^2 - a - 2 = (a-2)(a+1) = 0$

$\Leftrightarrow a = 2$ o $a = -1$

Si $a = -1 \Rightarrow$ es inconsistente

Si $a = 2 \Rightarrow$ hay una variable libre

y la matriz queda

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\therefore$ la solución es una recta cuya ec. es

$x_4 = t$ libre

$x_3 = -2 + 2t$

$x_2 = 2 - 2t + 2 - 2t =$

$= 4 - 4t$

$x_1 = -t - 2(-2 + 2t) - (4 - 4t)$

$= -t + 4 - 4t - 4 + 4t$

$= -t$

$\therefore$ la ecuación es

$$t\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En todo los otros casos hay solución única

(1 pto) x escalonar
(1 pto) x estudiar caso $a=1$
(1 pto) x solución caso $a=1$
(1 pto) x estudiar caso $a=2$
(1 pto) x solución caso $a=2$
(1 pto) x descartar los otros casos.

$$T(e_3) = \begin{pmatrix} -2 \\ -4/3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$T(e_2) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - T(e_3)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -4/3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 16/3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$T(e_1) = \frac{1}{2}\left[T\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 2T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 16/3 & -4/3 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$M \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 25/3 & -22/3 \\ 0 & 10 & -10 \end{pmatrix}$$

$$M \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 25 & -22 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ M tient 3 points

$\Rightarrow$ La transf est injective

$\Rightarrow$ droites lié vont en droites lié

$\Rightarrow$ plans vont en plans

1 pts $\times$ $T(e_1)$

1 pts $\times$ $T(e_2)$

1 pts $\times$ $T(e_3)$

1 pts $\times$ escalaire

2 pts $\times$ conclure par plans vont à plans

② $P_2 = V$ $\quad \mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$

$$[1 - x + 7x^2]_{\mathcal{B}}$$

Encontrar $[p(x)]_{\mathcal{B}}$ genérico

③ $P_2 = V$ $\quad \mathcal{B} = \{1 + x, 1 - x, x^2\}$

$$[8 - 2x + 3x^2]_{\mathcal{B}}$$

Demostrar que

$$T: V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$v \longrightarrow [v]_{\mathcal{B}}$$

- es lineal
- es inyectiva y sobreyectiva.

Hacer demo

Observación

$V \xrightarrow{T} \mathbb{R}^n$

toma conjunto li y los lleva a li ($\Leftarrow$)

Teorema:

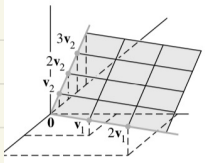
Si V tiene una base de n vectores
$\Rightarrow$ toda base tiene exactamente n vectores.

Hacer demo

Dfinir dimensión

Hacer 1 3 y comentar 4

EJEMPLO 1 La base estándar para $\mathbb{R}^n$ contiene n vectores, por lo que dim $\mathbb{R}^n = n$. La base polinomial estándar $\{1, t, t^2\}$ indica que dim $\mathbb{P}_2 = 3$. En general, dim $\mathbb{P}_n = n + 1$. El espacio $\mathbb{P}$ de todos los polinomios es de dimensión infinita (ejercicio 27). ■



EJEMPLO 2 Sea $H = \text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, donde $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Entonces H es el plano estudiado en el ejemplo 7 de la sección 4.4. Una base para H es $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, ya que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ no son múltiplos y, por consiguiente, son linealmente independientes. Por lo tanto, dim $H = 2$. ■

EJEMPLO 3 Encuentre la dimensión del subespacio

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a - 3b + 6c \\ 5a + 4d \\ b - 2c - d \\ 5d \end{bmatrix} : a, b, c, d \text{ en } \mathbb{R} \right\}$$

SOLUCIÓN Es fácil ver que H es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Claramente, $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_2$ no es un múltiplo de $\mathbf{v}_1$, pero $\mathbf{v}_3$ es un múltiplo de $\mathbf{v}_2$. De acuerdo con el teorema del conjunto generador, podemos descartar a $\mathbf{v}_3$ y aún así tener un conjunto generador H. Finalmente, $\mathbf{v}_4$ no es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Por lo tanto, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$ es linealmente independiente (de acuerdo con el teorema 4 de la sección 4.3) y, en consecuencia, es una base para H. Por consiguiente, dim $H = 3$. ■

EJEMPLO 4 Los subespacios de $\mathbb{R}^3$ se pueden clasificar por dimensiones. Véase la figura 1.

Subespacios de dimensión 0. Solo el subespacio cero.

Subespacios de dimensión 1. Cualquier subespacio generado por un solo vector distinto de cero. Tales subespacios son rectas que pasan por el origen.