PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2024

Pauta Interrogación 1 - MAT1203

1. Considere el sistema de ecuaciones en variables x, y, z

$$\begin{aligned} x + ay + 2z &= 1 \\ y + 2z &= 2 \\ x + y + az &= b \end{aligned}$$

Determine para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ el sistema:

a) Tiene infinitas soluciones.

b) Tiene solución única.

c) No tiene solución.

Solución:

Observe que la matriz ampliada asociada al sistema es: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & a & b \end{array}\right]$, realizando la operación $F_3 \to F_3 - F_1$ obtenemos la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1-a & a-2 & b-1 \end{array}\right] \quad (1)$$

Observe que si $a = 1$ la matriz queda

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & b-1 \end{array}\right]$$

que, independiente del valor de b corresponde a un sistema que tiene solución única ya que todas las filas y columnas de la matriz de coeficientes tienen pivotes.

Si $a \neq 1$ tenemos que realizar una nueva operación de filas paar escalonar la matriz (1). Al realizar la operación $F_3 \to F_3 + (a-1)F_2$, obtenemos la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3a-4 & 2a+b-3 \end{array}\right]$$

Si $a = \frac{4}{3}$, la matriz queda

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b - 1/3 \end{array}\right]$$

por lo tanto es inconsistente si $b \neq \frac{1}{3}$ y tiene infinitas soluciones si $b = \frac{1}{3}$.

Si $a \neq \frac{4}{3}$ todas las filas y columnas de la matriz de coeficientes tienen pivotes y por lo tanto el sistema tiene solución única, en resumen, el sistema tiene solución única si $a \neq \frac{4}{3}$ e independiente de lo que valga b, tiene infinitas soluciones si $a = \frac{4}{3}$ y $b = \frac{1}{3}$ y es inconsistente si $a = \frac{4}{3}$ y $b \neq \frac{1}{3}$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por plantear la matriz ampliada.
- (1 punto) por escalonar correctamente la matriz.
- (1 punto) por la separación adecuada en casos
- (1 punto) Por determinar, justificadamente, los valores para los que el sistema tiene solución única.
- (1 punto) Por determinar, justificadamente, los valores para los que el sistema no tiene solución.
- (1 punto) Por determinar, justificadamente, los valores para los que el sistema tienen infinitas soluciones.

2. Suponga que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene como solución el conjunto

$$\left\{ x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} ; t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

a) ¿Es $\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$ solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$?

Solución:

Observe que el vector $\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$ es solución del sistema si y sólo si existen t y $s \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

observe que para $t = 2$ y $s = -1$ se cumple la igualdad, por lo tanto el vector sí pertenece al conjunto solución.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por plantear la ecuación.
- (0.5 punto) por determinar el valor de s.
- (0.5 punto) por determinar el valor de t.
- (1 punto) por concluir.

b) ¿Existe un vector $\mathbf{c}$ de modo que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ tenga como solución exactamente el conjunto

$$\left\{ x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}?$$

Solución:

No es posible porque si $Ax = c$ es consistente, por teorema sabemos que el conjunto solución es el conjunto solución del sistema homogéneo $Ax = 0$ más una solución particular, pero del enuncaido tenemos que la solución del sistema $Ax = 0$ es el conjunto

$$\left\{ x = t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} ; t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

que no coincide con el descrito.

Distribución de puntaje:

- (1 punto) por afirmar que no.
- (2 puntos) por justificar correctamente.

3. a) Demuestre que si el conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ es linealmente independiente, entonces el conjunto $\{\mathbf{u+v}, \mathbf{u-v}\}$ también lo es.
Solución:

Observe que $\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \beta(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ si y sólo si $(\alpha+\beta)\mathbf{u} + (\alpha-\beta)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, por hipótesis, tenemos que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ es li, por lo tanto necesariamente $\alpha + \beta = 0$ y $\alpha - \beta = 0$, lo que implica que $\alpha = \beta = 0$, luego $\{\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}\}$ es linealmente independiente.

   - (1 punto) por plantear loa definición (puede ser de manera implícita)
   - (1 punto) por el desarrollo de la demostración.
   - (1 punto) por la conclusión.

   b) Demuestre que si A es una matriz de 3×5 y D una matriz de 5×3 tales que $AD = I_3$, entonces las columnas de A generan todo $\mathbb{R}^3$.(I_3 es la matriz identidad de tamaño 3×3).
Solución:

Observe que las columnas de A generan $\mathbb{R}^3$ si y sólo si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente para todo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$. Dado $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ considere $x = D\mathbf{b}$ y observe que

$$A\mathbf{x} = A(D\mathbf{b}) = (\mathbf{AD})\mathbf{b} = \mathbf{Ib} = \mathbf{b}$$

por lo tanto $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente, y de esta forma podemos concluir que las columnas de la matriz A generan todo $\mathbb{R}^3$.

   - (1 punto) por plantear alguna equivalencia útil para demostrar lo pedido.
   - (1 punto) por el desarrollo de la demostración.
   - (1 punto) por la conclusión.

4. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que:

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) Determine la matriz de la transformación.
Solución:

Sabemos que la matriz de la transformación es $[T(e_1), T(e_2)]$, para esto observamos primero que $e_2 = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, por lo tanto

$$T(e_2) = -\frac{1}{2}T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

por otra parte, $e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - e_2$, luego

$$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) - T(e_2) = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto la matriz de la transformación es

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 7 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) ¿Es T uno a uno?
Solución:

Una forma escalonada de la matriz $[T]$ es

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

luego podemos concluir que T es uno a uno ya que la matriz de la transformación tiene dos pivotes, es decir, todas las columnas tiene pivotes.

c) ¿Es T sobre?
Solución:

La transformación no es sobre ya que no todas las filas de la FE tienen pivotes.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por determinar $T(e_1)$
- (1 punto) por determinar $T(e_2)$
- (1 punto) por determinar la matriz
- (1 punto) Por escalonar la matriz
- (1 punto) Por justificar porque es uno a uno.
- (1 punto) Por justificar porque no es sobre.

5. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & k \end{bmatrix}$

a) Determine para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ la matriz A es invertible.
Solución:

Sabemos que A es invertible si y sólo si A tiene 3 pivotes, para determinar esta condición escalonamos la matriz obteniendo que

$$A \sim_{F_2 \to F_2 + F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & k \end{bmatrix} \sim_{F_2 \to \frac{1}{2}F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & k \end{bmatrix} \sim_{F_3 \to F_3 - 5F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & k-15 \end{bmatrix}$$

por lo tanto A es invertible si y sólo si $k \neq 15$.

b) Para $k = -1$ escriba A como producto de matrices elementales y calcule A^{-1}.
Solución:

Del inciso anterior tenemos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -16 \end{bmatrix}$$

si seguimos escalonando tenemos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

restando tres veces la tercera fila a la segunda obtenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

finalemnte

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = I_3$$

por lo tanto

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{-15}{16} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{32} & \frac{1}{32} & \frac{3}{16} \\ \frac{5}{32} & \frac{5}{32} & \frac{-1}{16} \end{bmatrix}$$

por otra parte, al despejar A, invirtiendo las matrices elementales, tenemos que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por establecer una equivalencia para determinar condiciones que determinan que A es invertible.
- (1 punto) por determinar valores de k.
- (1 punto) por determinar las elementales que llevan A a la identidad.
- (1 punto) Por determinar A^{-1}.
- (2 punto) Por describir A como producto de elemntales