PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2026

Pauta Examen - MAT1203

1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal cuya matriz respecto a la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$ es:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determine $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$.

   (b) Determine una base para $\text{Nul}(T)$.

   (c) ¿La transformación T es invertible?.

Solución:

(a) Primero determinamos las coordenadas de

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

en la base $\mathcal{B}$, para eso buscamos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

De esto se obtiene que

$$\alpha = 2, \qquad \beta = 1, \qquad \gamma = -1.$$

Por lo tanto,

$$\left[\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

luego,

$$[T(v)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como este vector está escrito en coordenadas de la base $\mathcal{B}$, se tiene que

$$T(v) = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(b) Para determinar una base para Nul(T), resolvemos

$$[T]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = 0.$$

Sea

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Reduciendo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\alpha + \gamma = 0, \qquad \beta + \gamma = 0.$$

Tomando $\gamma = t$, se obtiene

$$\alpha = -t, \qquad \beta = -t.$$

Así,

$$[v]_{\mathcal{B}} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

El vector coordenado

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

corresponde al vector

$$-\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, una base para $\text{Nul}(T)$ es

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

(c) Del inciso anterior se tiene que

$$\text{Nul}(T) \neq \{0\}.$$

Por lo tanto, T no es inyectiva.

Así, T no es invertible.

Criterio de evaluación.

Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	1 pto	Determina correctamente el vector coordenado de $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ en la base $\mathcal{B}$.
C2	1 pto	Calcula correctamente la imagen y la reconstruye en la base canónica.
C3	1 pto	Determina el $\text{Nul}([T]_{\mathcal{B}})$.
C4	1 pto	Reconstruye en la base canónica para determinar una base de $\text{Nul}(T)$.
C5	1 pto	Afirma que la transformación no es invertible.
C6	1 pto	Justifica correctamente que T no es invertible (observar que hay múltiples justificaciones).

2. En un programa de reforzamiento escolar, se registra la cantidad de sesiones de apoyo matemático a las que asisten algunos estudiantes durante un mes. Luego, se mide su desempeño promedio en una tarea específica de resolución de problema. Los datos obtenidos fueron los siguientes:

x	0	1	2	3
y	1	1	2	2

donde x representa el número de sesiones de apoyo a las que asistió un estudiante, e y representa el puntaje promedio obtenido en la tarea. Suponga que se desea ajustar a estos datos un modelo lineal de la forma

$$y = mx + c.$$

a) [1 punto] Plantee el problema como un sistema matricial de la forma

$$A\mathbf{x} = b,$$

indicando explícitamente A y b.

b) [4 puntos] Encuentre la recta de mínimos cuadrados, $y = mx + c$, que mejor se ajusta a los datos.

c) [1 punto] Use el modelo encontrado para estimar el puntaje promedio de un estudiante que asiste a 4 sesiones de apoyo.

Solución:

a) Si $y = mx + c$, entonces para cada dato (x_i, y_i) se tiene

$$mx_i + c \approx y_i.$$

Por lo tanto, el problema de mínimos cuadrados se puede escribir como

$$A \begin{bmatrix} c \\ m \end{bmatrix} = b,$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

b) Las soluciones de mínimos cuadrados satisfacen las ecuaciones normales

$$A^T A \begin{bmatrix} c \\ m \end{bmatrix} = A^T b.$$

Calculamos

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}, \qquad A^T b = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 6 \\ 6 & 14 & 11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 3 \\ 6 & 14 & 11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{array}\right].$$

De la segunda ecuación se obtiene que

$$m = \frac{2}{5}.$$

y reemplazando en la primera se tiene que

$$2c + 3\left(\frac{2}{5}\right) = 3,$$

de donde

$$c = \frac{9}{10}.$$

Por lo tanto, la recta de mínimos cuadrados es

$$y = \frac{2}{5}x + \frac{9}{10}.$$

c) Para un estudiante que asiste a 4 sesiones de apoyo,

$$y = \frac{2}{5}(4) + \frac{9}{10} = \frac{16}{10} + \frac{9}{10} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}.$$

Por lo tanto, el modelo estima un puntaje promedio de $\frac{5}{2}$.

Criterio de evaluación.

Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	1 pto	Plantea correctamente el problema en la forma matricial $Ax = b$.
C2	1 pto	Calcula correctamente las matrices A^TA y A^Tb.
C3	1 pto	Plantea correctamente las ecuaciones normales.
C4	1 pto	Resuelve correctamente el sistema.
C5	1 ptos	Determina la recta de mínimos cuadrados.
C6	1 pto	Utiliza correctamente el modelo para estimar el puntaje correspondiente a 4 sesiones de apoyo.

3. Considere la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ dada por

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2.$$

(a) Clasifique la forma cuadrática en positiva definida, negativa definida o indefinida.

(b) Realice un cambio de variable $x = Py$, determinando explícitamente P, de modo que la forma cuadrática quede sin productos cruzados.

Solución:

a) La matriz simétrica asociada a la forma cuadrática es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Para clasificar la forma cuadrática, determinamos los valores propios de A. Al calcular la ecuación característica obtenemos que:

$$|A - \lambda I| = (2-\lambda)\begin{vmatrix} (2-\lambda) & 0 \\ 0 & (4-\lambda) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (4-\lambda) \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-1).$$

Por lo tanto, los valores propios de A son

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 3, \qquad \lambda_3 = 4.$$

Como todos los valores propios son positivos, la forma cuadrática es definida positiva.

b) Determinamos una base ortonormal de vectores propios.
Para $\lambda = 3$, un vector propio asociado es

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Normalizando,

$$q_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda = 1$, un vector propio asociado es

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Normalizando,

$$q_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda = 4$, un vector propio asociado es

$$q_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tomamos entonces

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Con el cambio de variable

$$x = Py,$$

se obtiene

$$Q(x_1, x_2, x_3) = y^T D y,$$

donde

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la forma cuadrática sin productos cruzados es

$$Q(y_1, y_2, y_3) = 3y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2.$$

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	0.5 pto	Determina correctamente la matriz simétrica asociada a la forma cuadrática.
C2	1.5 pto	Determina correctamente los valores propios de la matriz asociada.
C3	1 pto	Clasifica correctamente la forma cuadrática como definida positiva.
C4	1 pto	Determina correctamente vectores propios asociados a los valores propios.
C5	1 pto	Construye correctamente una matriz ortogonal P.
C6	1 pto	Realiza correctamente el cambio de variable $x = Py$ y obtiene la forma sin productos cruzados.

4. Suponga

$$A = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} \\ -2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45} \\ 2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

es una descomposición en valores singulares de A.

(a) Determine una diagonalización ortogonal de A^TA.

(b) Encuentre una base ortonormal para Col(A).

Solución:

(a) Como la descomposición dada es una DVS, podemos escribir

$$A = U\Sigma V^T.$$

Entonces

$$A^TA = (U\Sigma V^T)^T(U\Sigma V^T) = V\Sigma^T U^T U\Sigma V^T.$$

Como U es una matriz ortogonal, se tiene que

$$U^TU = I.$$

Por lo tanto,

$$A^TA = V\Sigma^T\Sigma V^T.$$

Ahora,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

luego

$$\Sigma^T\Sigma = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Así, una diagonalización ortogonal de A^TA está dada por

$$A^TA = PDP^T,$$

donde

$$P = V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Para encontrar una base ortonormal de $\mathrm{Col}(A)$, usamos que las columnas de U asociadas a valores singulares no nulos forman una base ortonormal de $\mathrm{Col}(A)$.

En este caso, el único valor singular no nulo es

$$\sigma_1 = 3\sqrt{2}.$$

Por lo tanto, una base ortonormal para $\mathrm{Col}(A)$ está dada por la primera columna de U, es decir,

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \right\}.$$

Criterio de evaluación.

Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	1 pto	Reconoce que si $A = U\Sigma V^T$, entonces $A^TA = V\Sigma^T\Sigma V^T$.
C2	1 pto	Calcula correctamente $\Sigma^T\Sigma$.
C3	1 pto	Determina correctamente una diagonalización ortogonal de A^TA.
C4	1 pto	Reconoce que las columnas de U asociadas a valores singulares no nulos generan $\mathrm{Col}(A)$.
C5	1 pto	Identifica correctamente el valor singular no nulo.
C6	1 pto	Determina correctamente una base ortonormal para $\mathrm{Col}(A)$.