PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2025

Pauta Examen - MAT1203

1. El sistema de ecuaciones $Ax = \vec{b}$ tiene como conjunto solución

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ : \ \text{con } t \in \mathbb{R} \right\}.$$

   (a) ¿Cuál es el conjunto solución del sistema de ecuaciones $Ax = \vec{0}$?

   (b) ¿Es el vector $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ solución del sistema $Ax = \vec{b}$? Justifique.

   (c) ¿Existe un vector $\vec{c}$ tal que el sistema de ecuaciones $Ax = \vec{c}$ tenga como conjunto solución una plano? Justifique.

Solución:

   (a) El conjunto solución del sistema de ecuaciones homogéneo $Ax = 0$ es

$$\left\{ t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ : \ \text{con } t \in \mathbb{R} \right\}.$$

   (b) No, porque el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, al ser solución particular del sistema de ecuaciones satisface $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = b$. Además, como $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, se tiene que $A \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2b \neq b$ porque el sistema no es homogéneo.

   Otra solución:

Observe que $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ es solución si y sólo si existe $t \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\begin{aligned} 1-t &= 2 \\ 2+t &= 4 \\ 1+t &= 2 \\ t+ &= 0 \end{aligned}$$

de la primera ecuación se tiene que $t = -1$ pero de la segunda se tiene que $t = 2$, por lo tanto no existen tales parámetros, por lo tanto el vector $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ no es solución del sistema.

(c) No, porque si el sistema de ecuaciones $Ax = c$ fuese consistente, su conjunto solución sería una traslación del conjunto solución de $Ax = b$, por lo tanto, siempre sería una recta.

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	**2 puntos**	Reconocer la parte de la solución homogénea.
C2	**1 pto**	Por responder que no a (b).
C3	**1 pto**	Por justificar la respuesta de (b).
C4	**1 pto**	Por responder que no a (c).
C5	**1 pto**	Por justificar la respuesta de (c).

2. Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ la transformación lineal definida por

$$T(p(x)) = p''(1) + p'(1)x + p(1)x^2$$

(a) Determine la matriz de la transformación asociada a la base $\mathcal{B} = \{1+x, 1-x, x^2\}$ en $\mathbb{P}_2$.

(b) Determine una base para el $\text{Nul}(T)$ e $\text{Im}(T)$.

Nota: $p'(x)$ y $p''(x)$ son la primera y segunda derivada de $p(x)$

Solución:

Aplicamos T a cada vector de la base y expresamos los resultados en coordenadas respecto a $\mathcal{B}$.

Observe que para $p(x) = 1 + x$, tenemos que

$$p(1) = 2, \quad p'(1) = 1, \quad p''(1) = 0 \Rightarrow T(1+x) = x + 2x^2$$

Buscamos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que:

$$x + 2x^2 = a(1+x) + b(1-x) + cx^2 \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a-b=1 \\ c=2 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{1}{2},\ c = 2$$

$$[T(1+x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ahora para $p(x) = 1 - x$

$$p(1) = 0, \quad p'(1) = -1, \quad p''(1) = 0 \Rightarrow T(1-x) = -x$$

Buscamos:

$$-x = a(1+x) + b(1-x) + cx^2 \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a-b=-1 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2},\ c = 0$$

$$[T(1-x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

finalmente para $p(x) = x^2$

$$p(1) = 1, \quad p'(1) = 2, \quad p''(1) = 2 \Rightarrow T(x^2) = 2 + 2x + x^2$$

Buscamos:

$$2 + 2x + x^2 = a(1+x) + b(1-x) + cx^2 \Rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ a-b=2 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow a = 2,\ b = 0,\ c = 1$$

$$[T(x^2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto la matriz es

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para determinar el $\text{Nul}(t)$ buscamos $p(x) \in \mathbb{P}_2$ tal que:

$$T(p(x)) = p''(1) + p'(1)x + p(1)x^2 = 0$$

esto implica que

$$p(1) = 0, \quad p'(1) = 0, \quad p''(1) = 0$$

Sea $p(x) = a + bx + cx^2$, por lo tanto

$$p(1) = a + b + c = 0, \quad p'(1) = b + 2c = 0, \quad p''(1) = 2c = 0 \Rightarrow c = 0,\ b = 0,\ a = 0 \Rightarrow p(x) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Nul}(T) = \{0\}, \quad \dim \text{Nul}(T) = 0}$$

Por Teorema sabemos que ya que la dimensión del Nul es cero, la dimensión de la imagen es 3 por lo tanto es todo $\mathbb{P}_2$, por lo tanto una posible base es $\{1, x, x^2\}$.

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	**1 pto**	por determinar el vector coordenado de $1 + x$.
C2	**1 pto**	por determinar el vector coordenado de $1 - x$.
C3	**1 pto**	por determinar el vector coordenado de x^2.
C4	**0.5 pto**	por determinar la matriz.
C5	**0.5 pto**	por determinar las condiciones que determinan el Nul, ya sea por la forma o la matriz..
C6	**1 pto**	Por determinar que el Nul es $\{0\}$.
C7	**1 pto**	Por determinar dimensión de la imagen, ya sea por la matriz por teorema o determinando la imagen y dar una base

3. Determine la ecuación de la recta de mínimos cuadrados $y = mx + n$ que pase más cerca de los puntos $(1, 1)$, $(2, 2)$ y $(3, 4)$.

Solución:
La recta es de la forma $y = mx + n$, lo que equivale a:

$$y_i = mx_i + n$$

Dado que los puntos son (x_i, y_i), definimos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

para resolver el problema, necesitamos encontrar las soluciones de la ecuación normal:

$$A^T Ax = A^T b$$

calculando obtenemos

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 7 \end{bmatrix}$$

para resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 7 \end{bmatrix}$$

multiplicamos la fila 1 por 3:

$$42m + 18n = 51$$

multiplicamos la fila 2 por 6:

$$36m + 18n = 42$$

restando

$$6m = 9 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

sustituyendo en la primera ecuación:

$$14 \cdot \frac{3}{2} + 6n = 17 \Rightarrow 21 + 6n = 17 \Rightarrow 6n = -4 \Rightarrow n = -\frac{2}{3}$$

obtenemos que la recta de mínimos cuadrados es:

$$\boxed{y = \frac{3}{2}x - \frac{2}{3}}$$

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	**1 pto**	Por conocer la ecuación normal.
C2	**1 pto**	Por determinar A.
C3	**1 pto**	Por determinar $A^t A$.
C4	**1 pto**	Por calcular $A^t b$.
C5	**1 pto**	Por resolver el sistema.
C6	**1 pto**	Por dar la recta solución.

4. Sea Q la forma cuadrática definida por $Q(x_1, x_2) = -5x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2$.

   (a) Clasifique la forma cuadrática en positiva definida, negativa definida o indefinida.

   (b) Realice un cambio de variable $x = Py$, determinando explícitamente P, de modo que la forma cuadrática quede sin productos cruzados.

   Solución:
   La matriz simétrica asociada es

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

   para calcular los valores propios de A resolvemos

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda)(-2-\lambda) - 4$$

$$= \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -1, \lambda = -6$$

   obteniendo que ambos valores propios son negativos por lo que la forma cuadrática es negativa definida. Para $\lambda = -1$, el espacio propio corresponde al espacio generado por

$$(A + I)\vec{v} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow v_2 = 2v_1 \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

   para $\lambda = -6$, el sistema espacio propio es generado por

$$(A + 6I)\vec{v} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow v_2 = -\tfrac{1}{2}v_1 \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

   Normalizamos cada vector obteniendo que

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \quad \|\vec{v}_2\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

   Entonces la base ortonormal de evtores propios es

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \hat{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

   por lo tanto

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \quad \text{cumple que } P^{-1} = P^\top$$

   con el cambio de variable ortogonal $\vec{x} = P\vec{y}$, la forma cuadrática queda diagonal de la forma

$$Q(\vec{y}) = -y_1^2 - 6y_2^2$$

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	**0.5 pto**	Por determinar la matriz A.
C2	**1 pto**	Por determinar los valores propios de A.
C3	**0.5 pto**	Por concluir que la forma cuadrática es negativa definida.
C4	**1 pto**	Por determina el espacio propio asociado a -1.
C5	**1 pto**	Por determina el espacio propio asociado a -6.
C6	**1 pto**	Por determinar P.
C7	**1 pto**	Por determinar la forma cuadrática sin productos cruzados.

5. Determine la descomposición en valores singulares de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sabiendo que los valores propios de A^tA son $4, 2$ y 0.

Solución:
Sabemos que los valores singulares de A son las raíces cuadradas de los valores propios de A^TA, es decir

$$\sigma_1 = 2, \quad \sigma_2 = \sqrt{2}, \quad \sigma_3 = 0.$$

para construir V, necesitamos determinar los vectores propios asociados a cada valor propio de

$$A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Los vectores propios ortonormales asociados a estos valores propios son:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con esto, construimos:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

para determinar U calculamos

$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$ obteniendo que

$$u_1 = \frac{1}{2} A v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} A v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Completamos una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ con vectores ortogonales a u_1 y u_2:

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

obtenemos

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

finalemente tenemos que

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

obteniendo así que la descomposición SVD de A es:

$$A = U \Sigma V^T$$

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	**1 pto**	Por determinar los valores singulares.
C2	**1 pto**	Por determinar los vectores propios.
C3	**1 pto**	Por determinar V.
C4	**1 pto**	Por determinar las primeras dos columnas de U.
C5	**1 pto**	Por determinar U.
C6	**1 pto**	Por determinar Σ.