PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2025

Examen - MAT1203

1. Considere $\mathbb{P}_2$, el espacio de polinomios de grado menor o igual a dos, con la base $\mathcal{B} = \{x^2, x, 1\}$ y sea T la transformación lineal de $\mathbb{P}_2$ en $\mathbb{P}_2$ definida por:

$$T(ax^2 + bx + c) = (a + 3b + 3c)x^2 + (-3a - 5b - 3c)x + (3a + 3b + c)$$

   (a) **[1 punto]**Calcule $T(x^2 - x + 1)$.
   Solución:

   Observe que para el polinomio $p(x) = x^2 - x + 1$ se tiene que $a = 1, b = -1$ y $c = 1$, así que reemplazando en la fórmula se tiene que

$$T(x^2 - x + 1) = (1 - 3 + 3)x^2 + (-3 + 5 - 3)x + (3 - 3 + 1) = x^2 - x + 1.$$

   (b) **[1 punto]**Determine la $\mathcal{B}-$matriz para T.
   Solución:

   Para determinar la $\mathcal{B}-$matriz debemos determinar el vector coordenado de la imagen de los elementos de la base. Observe que

$$T(x^2) = x^2 - 3x + 3,\ T(x) = 3x^2 - 5x + 3 \text{ y } T(1) = 3x^2 - 3x + 1$$

   por lo tanto la $\mathcal{B}$ es

$$[T]_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

   (c) **[4 puntos]**Determine una base $\mathcal{C}$ para $\mathbb{P}_2$ de modo que la $\mathcal{C}$-matriz para T sea diagonal.
   Solución:

   Para determinar la base pedida debemos determinar una base de vectores propios de la matriz, para eso observamos que la ecuación característica de $[T]_{\mathcal{B}}$ es

$$-(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2 = 0$$

   por lo que los valores propios son $\lambda = 1$ y $\lambda = -2$. Al determinar los espacios propios observamos que

$$E_1 = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, E_{-2} = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

estos corresponden a los vectores coordenados en la base $\mathcal{B}$, por lo tanto una base que cumple con las condiciones pedidas es

$$\mathcal{C} = \{x^2 - x + 1, -x^2 + 1, -x^2 + x\}.$$

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	**1 pto**	Por determinar la imagen de $x^2 - x + 1$.
C2	**1 pto**	Por determinar la $\mathcal{B}$-matriz.
C3	**1 pto**	Por determinar los valores propios.
C4	**1 pto**	Por determinar los vectores propios.
C5	**2 ptos**	Por determinar una base $\mathcal{C}$.

2. Sea Π el plano de ecuación vectorial

$$\vec{x} = s \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(a) **[2 puntos]**Encuentre una base ortogonal para el plano Π.
Solución.
El plano es generado por

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

por lo que una base ortogonal es

$$\vec{u} = \vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{v} = \vec{y} - \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\vec{x} \cdot \vec{x}} \vec{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(b) **[4 puntos]**Determine la distancia del punto $(-1, -5, 10)$ al plano Π.
Solución:
La proyección ortogonal de $(-1, -5, 10)$ sobre el plano es

$$\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{7}{4}\vec{y} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{7}{4} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Luego, la distancia es la norma del vector

$$\begin{bmatrix}-1\\-8\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1\\-5\\10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-3\\-6\end{bmatrix}$$

es decir

$$\sqrt{9+36} = \sqrt{45}.$$

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	**1 pto**	Por proceso de Gram-Schmidt.
C2	**1 pto**	Por determinar una base ortogonal del plano.
C3	**2 pto**	Por determinar loa proyección sobre el plano.
C4	**1 pto**	Por determinar el vector al que hay que calcularle la norma.
C5	**1 pto**	Por determinar la distancia.

3. Considere la forma cuadrática $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2$.

   (a) **[1 punto]**Encuentre la matriz simétrica A de modo que $Q(x_1, x_2) = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ con $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$.

   Solución:

   La matriz simétrica de la forma cuadrática es

   $$A = \begin{bmatrix}1 & -3\\-3 & 9\end{bmatrix}$$

   (b) **[5 puntos]**Realice un cambio de variables para transformar a Q en una forma sin términos cruzados.

   Solución:

   El polinomio característico de A es $X^2 - 10X = X(X-10)$. Así, sus valores propios son el 0 y el 10. Resolviendo los sistemas $\left[\begin{array}{cc|c}1 & -3 & 0\\-3 & 9 & 0\end{array}\right]$ (asociado a 0) y $\left[\begin{array}{cc|c}-9 & -3 & 0\\-3 & -1 & 0\end{array}\right]$ (asociado a 10), podemos encontrar los vectores propios $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ (asociado a 0) y $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}$ (asociado a 10).

Su norma es $||\boldsymbol{v}_1|| = ||\boldsymbol{v}_2|| = \sqrt{10}$ y son ortogonales (provienen de distintos valores propios). Por lo tanto, $P = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ es una matriz ortogonal y tenemos la igualdad

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = P^T A P$$

Haciendo el cambio de variable $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ con $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ obtenemos

$$Q(x_1, x_2) = \boldsymbol{y}^T D \boldsymbol{y} = 10y_2^2.$$

Esto es un cambio de variables que cambia a Q por la forma sin términos cruzados $10y_2^2$.

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	**1 pto**	Por determinar la matriz.
C2	**1 pto**	Por determinar los valores propios.
C3	**1 pto**	Por determinar los vectores propios.
C4	**1 pto**	Por determinar P
C5	**1 pto**	Por determinar que el cambio de variable es $x = Py$
C6	**1 pto**	Por determinar la forma sin productos cruzados.

4. Suponga que la siguiente factorización es una descomposición en valores singulares (DVS) de una matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{45}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T$$

(a) **[2 puntos]**¿Cuál es el rango de A?
Solución:

Observamos de la matriz que los valroes singulares de A son 0 y 3, sólo hay uno distinto de cero, y por lo tanto el rango de A es 1.

(b) **[4 puntos]**Encuentre una diagonalización ortogonal para la matriz simétrica AA^T.

Solución:

Sabemos que

$$A = U\Sigma V^T$$

con

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{45}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

de lo anterior tenemos que

$$AA^T = (U\Sigma V^T)(V\Sigma^T U^T) = U\Sigma\Sigma^T U^T$$

como $\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, tenemos que

$$\Sigma\Sigma^T = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$AA^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{45}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{45}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} \end{bmatrix}^T$$

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	**1 pto**	Por determinar que el rango es 1.
C2	**1 pto**	Por justificar que el rango es 1.
C3	**1 pto**	Por determinar la forma de AA^T.
C4	**1 pto**	Por determinar $\Sigma\Sigma^T$.
C5	**1 pto**	Por saber que U es ortogonal
C6	**1 pto**	Por dar la factorización.