PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2024

Pauta Examen - MAT1203

1. Considere el sistema de ecuaciones en las variables x, y, z

$$\begin{cases} x + y + az &= 1 \\ x + ay + z &= 1 \\ ax + y + z &= 1 \end{cases}$$

   (a) Determine para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el sistema tiene solución.

   (b) Determine, si es posible, para qué valores a la solución de este sistema es una recta.

Solución:
Escalonando la matriz ampliada asociada al sistema, tenemos que

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$F_2 \to F_2 - F_1 \quad \sim \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & (a-1) & (1-a) & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$F_3 \to F_3 - aF_1 \quad \sim \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & (a-1) & (1-a) & 0 \\ 0 & (1-a) & (1-a^2) & (1-a) \end{array}\right]$$

$$F_3 \to F_3 + F_2 \quad \sim \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & (a-1) & (1-a) & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & (1-a) \end{array}\right]$$

Observe que si $a = 1$ la matriz queda

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

lo que correspondería a un sistema consistente con dos variables libres, es decir, un sistema cuya solución es un plano en $\mathbb{R}^3$.

Si $a \neq 1$ podemos seguir escalonando, obteniendo que

$$\begin{array}{rcl} & & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & (a-1) & (1-a) & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & (1-a) \end{array}\right] \\ F_2 \to \dfrac{1}{(a-1)}F_2 & \sim & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & (1-a) \end{array}\right] \\ F_3 \to \dfrac{1}{(1-a)}F_3 & \sim & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & (a+2) & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Por lo tanto, si $a = -2$, la matriz queda

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que corresponde a un sistema inconsistente.

Ahora, si $a \neq 1$ y $a \neq -2$, tenemos que una FER de la matriz es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{a+2} \end{array}\right]$$

lo que corresponde a un sistema con solución única.

De lo anterior podemos concluir que el sistema tiene solución si y solo si $a \neq -2$, y que no existe valor de a de modo que la solución sea una recta.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por plantear la matriz ampliada correctamente.
- (1 punto) Por escalonar la matriz.
- (1 punto) Por estudiar el caso $a = 1$
- (1 punto) Por estudiar el caso $a \neq 1$ y $a \neq -2$
- (1 punto) Por estudiar caso $a = -2$.
- (1 punto) Por responder, justificadamente que no es posible tener por solución una recta.

2. Sea

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Determine A^{-1}.

Solución:

Al usar el algoritmo de Gauss para encontrar la inversa de A obtenemos que

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad F_1 \longleftrightarrow F_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$F_3 \longrightarrow F_3 + 6F_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right]$$

$$F_2 \longrightarrow -\frac{1}{3}F_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right]$$

$$F_3 \longrightarrow F_3 - 2F_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2/3 & 6 \end{array}\right]$$

por lo tanto

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & 2/3 & 6 \end{bmatrix}$$

Distribución de puntajes:

- (2 punto) Por llegar a la FER.
- (1 punto) Por escribir la inversa explícitamente

b) Use a) para resolver el sistema $Ax = 3e_2$.

Observe que el sistema $Ax = e_2$ tiene por solución la segunda columna de A^{-1} por lo tanto el sistema $Ax = 3e_2$ tiene como solución tres veces la segunda columna de la inversa de A es decir $x = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Distribución de puntajes:

- (2 punto) Por justificar la solución, podría ser multiplicando por A^{-1}
- (1 punto) Por dar la solución.

3. Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ la transformación lineal definida por $T(ax^2 + bx + c) = 2ax^2 + bx$.

   a) Determine el espacio nulo (núcleo o kernel) de la transformación.
   Solución:

   Observe que $p(x) = ax^2+bx+c$ pertenece al espacio nulo si y sólo si $T(p(x) = 2ax^2+bx = 0$, es decir si $a = 0$ y $b = 0$, por lo tanto el espacio nulo es el conjutno de polinomios constantes.
   Distribución de puntajes:

   - (1punto) por conocer la definición del espacio nulo.
   - (2 punto) por determinar el espacio nulo.

   b) Escriba el rango o imagen de T como conjunto generado.
   Solución:

   El rango de T es el conjunto de las imágenes de la función, luego es el conjunto de polinomios de la forma $p(x) = 2ax^2 + bx$ es decir el conjunto generado por x y x^2.
   Distribución de puntajes:

   - (1punto) por conocer la definición del rango
   - (1 punto) por descripción del rango.
   - (1 punto) por determinar generadores.

   .

4. Considere la forma cuadrática $Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2$. Clasifique Q y luego realice un cambio de variable que permita eliminar el producto cruzado de Q.

   Solución:

   Observe que la matriz que representa a la transformación es

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

   cuyo polinomio característico es

$$P_A(x) = (3 - x)^2 - 4$$

   por lo que los vectores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 5$, con esto podemos afirmar que la forma cuadrática es definida positiva.

   Para encontrar el cambio de variables veamos que

$$E_1 = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, E_5 = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

por lo tanto $A = PDP^T$, con $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

así el cambio de variables es $P^T x = y$, con esto queda $y_1 = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}$, $y_2 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}$. La forma cuadrática sin productos cruzados queda $y_1^2 + 5y_2^2$.

Distribución de puntajes:

- (1 pto) Por encontrar valores propios de la matriz que representa la forma cuadrática.
- (1 pto) Por clasificar Q.
- (1 pto) Por los espacios propios.
- (1 pto) Por encontrar P.
- (1 pto) Por el cambio de variable.
- (1 pto) Por escribir la forma sin productos cruzados.

5. Sean $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vectores en $\mathbb{R}^4$.

a) Determine una base para el complemento ortogonal del subespacio $\text{Gen}(v_1, v_2)$.

Solución:

Observe que $(\text{Gen}(v_1, v_2))^\perp = \text{Nul}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \text{Nul}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right)$, de está forma podemos ver que

$$(\text{Gen}(v_1, v_2))^\perp = Gen\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$$

y como además los vectores $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$ son linealmente independientes forman una base de complemento ortogonal de $\text{Gen}(v_1, v_2)$.

Distribución de puntajes:

- (1 pto) Por describir el complemento ortogonal.
- (1 pto) Por generadores.
- (1 pto) Por justificación de que son base.

b) Determine una base ortogonal de c de la forma $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, es decir que dos de sus elementos sean v_1 y v_2.

Solución:

Defina $v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. Observe que $v_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot v_3 = v_2 \cdot v_3 = 0$, por lo que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un conjunto ortogonal, por lo tanto aplicaremos el proceso de Gram Schmidt al conjunto $\{v_1, v_2, v_3, u_4\}$ para conseguir una base ortogonal de $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de esta forma tendremos , dado que u_4 es ortogonal a v_1 y v_2, que:

$$v_4 = u_4 - \left(\frac{v_3 \cdot u_4}{v_3 \cdot v_3} v_3\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \\ -1/2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

De lo anterior tenemos que el conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \\ -1/2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ es una base ortogonal para $\mathbb{R}^4$.

Distribución de puntajes:

- (1 pto) Por determinar quién será v_3 correctamente.
- (1 pto) Por conocer el proceso de Gram Schimdt.
- (1 pto) Por determinar v_4.