PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2024

Pauta Interrogación 3 - MAT1203

1. Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3,\ \mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_3,\ \mathbf{b}_3\}$ bases de $\mathbb{P}_2$.

   a) Encuentre la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

   b) Si $[1 + x - x^2]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, determine $[2 + 2x - 2x^2]_{\mathcal{B}}$.

Solución:

Observe que de la definición tenemos que

$$\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

y por lo tanto la matriz pedida es:

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \left(\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por otra parte, sabemos que $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}[p(x)]_{\mathcal{C}} = [p(x)]_{\mathcal{B}}$.

Por lo tanto

$$\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P} \cdot [1 + x - x^2]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

luego,

$$[2 + 2x - 2x^2]_{\mathcal{B}} = 2[1 + x - x^2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por determinar $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$.
- (1 punto) Por saber que $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \left(\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}\right)^{-1}$.
- (1 punto) Por calcular $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$.

- (1 punto) Por saber que $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}[p(x)]_{\mathcal{C}} = [p(x)]_{\mathcal{B}}$.
- (1 punto) Por calcular $[1 + x - x^2]_{\mathcal{B}}$.
- (1 punto) por calcular $[2 + 2x - 2x^2]_{\mathcal{B}}$.

2. Sean $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$ y A la matriz definida por

$$A = [\mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 \quad \mathbf{u}_3 \quad \mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2]$$

Determine bases para Col(A) y Nul(A).

Solución:

Sabemos que Col(A) es el generado por las columnas de A, es decir, el espacio generado por los vectores $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2\}$ ybestos son cuatro vectores de $\mathbb{R}^3$, por lo tanto es ld, observe que u_1, u_2 y u_3 pertenecen al Col(A), por lo tanto $\{u_1, u_2, u_3\}$ forman una base para el Col(A).

El Nul$A$ corresponde a todos los vectores $x \in \mathbb{R}^4$ tales que $Ax = 0$, es decir, el vector $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in$ Nul(A) si y solo si

$$x_1u_2 + x_2(u_2 - u_3) + x_3u_3 + x_4(u_1 + 4u_2) = 0$$

lo que equivale a la solución del sistema homogénea de matriz de coeficientes

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y que corresponde al conjunto generado por el vector $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por conocer la definición de Col(A).
- (1 punto) Por encontrar base de Col(A).
- (1 punto) Por justificar que el conjunto dado es base de Col(A).
- (1 punto) Por conocer la definición de Nul(A).
- (1 punto) Por determinar condiciones que deben satisfacer los elemento del Nul(A.
- (1 punto) Por determinar la base.

3. Sea

$$A = \begin{bmatrix} -1 & s & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Determine para qué valores de $s, t \in \mathbb{R}$ la matriz A es diagonalizable.

Solución:

Observe que

$$Det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} (-1-\lambda) & s & t \\ 0 & (1-\lambda) & 0 \\ 0 & -2 & (-1-\lambda) \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2(1-\lambda).$$

Por lo tanto la matriz A tiene dos valores propios, $\lambda = 1$ de multiplicidad algebraica 1 y $\lambda = -1$ de multiplicidad algebraica 2, por lo tanto A es diagonalizable si y solo si $\dim(E_{-1}) = 2$.

Sabemos que

$$E_{-1} = \text{Nul}\left(\begin{bmatrix} 0 & s & t \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

luego, el espacio propio asociado al valor propio -1 tiene dimensión 2 si y solo si la primera fila es múltiplo de las siguientes, es decir si $t = 0$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por calcular el polinomio característico.
- (1 punto) Por determinar los valores propios.
- (2 punto) Por determinar que necesitamos que el espacio propio asociado a -1 tenga dimensión 2.
- (1 punto) Por realizar análisis en la matriz.
- (1 punto) Por determinar que $t = 0$ y $s \in \mathbb{R}$.

4. Sea A una matriz cuya forma escalonada reducida es la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y tal que $A \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Demuestre que A es diagonalizable y determine P invertible, D diagonal tales que $AP = PD$.

Solución: Del enunciado tenemos que

$$A \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

por lo que tenemos que $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ es un vector propio de A con valor propio $-\frac{1}{2}$. Por otra parte, del enunciado tenemos que $\text{Nul}(A)=\text{Nul}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$, por lo tanto $\lambda = 0$ es valor propio cuyo espacio propio tiene dimensión 2, luego la matriz A es diagonalizable.

Para una diagonalización basta tomar

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } D = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por justificar que -1/2 es valor propio.
- (1 punto) Por determinar que 0 es valor propio
- (1 punto) Por justificar que A es diagonalizable.
- (1 punto) Por determinar dos vectores propios asociados al valor propio 0.
- (1 punto) Por determinar P
- (1 punto) Por determinar D en coherencia con el orden de las columnas de P. Restar 0.5 y si se equivoca en el orden.

5. Sea $T : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que la matriz para T respecto a las bases $\mathcal{B} = \{1-x, 1+x, 2x^2\}$ y $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ es la matriz:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determine la imagen bajo T del polinomio $p(x) = 4 + 3x^2$

b) Determine el núcleo de la transformación.

Solución:

Sabemos que

$$[T(p(x))]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot [p(x)]_{\mathcal{B}} \text{ para todo } p(x) \in \mathbb{P}_2,$$

en particular, dado que, $[4 + 3x^2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$, tenemos que

$$[T(4 + 3x^2)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/2 \\ 23 \\ 11/2 \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$T(p(x)) = \frac{13}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 23 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{11}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33/2 \\ 11/2 \\ 59/2 \end{bmatrix}.$$

Observe que al escalonar la matriz $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ obtenemos la matriz $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, obteniendo que el espacio nulo de la matriz de la transformación es el espacio generado por el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$, realizando la traducción al espacio de polinomios tenemos que el núcleo de la transformación es el generado por el polinomio

$$p(x) = 1(1-x) - 4(1+x) + 3(2x^2) = -3 - 5x + 6x^2$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por determinar las coordenadas del polinomio $p(x)$.
- (1 punto) Por determinar las coordenadas de la imagen de $p(x)$.

- (1 punto) Por determinar la imagen de $p(x)$.
- (1 punto) Por escalonar la matriz.
- (1 punto) Por determinar un vector que genera el Nul de la matriz.
- (1 punto) Por hacer la traducción y determinar el núcleo de T