Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 – Cálculo 2
Temporada Académica de Verano 2026

Interrogación 3

Solución

Problema 1

a) Clasifique los puntos críticos de la siguiente función:

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$$

Solución: Calculando las derivadas parciales e igualando a cero:

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 6x = 0, \quad f_y(x,y) = 3y^2 - 6y = 0$$

Con esto, obtenemos los puntos críticos:

$$(-2,2), (-2,0), (0,2), (0,0)$$

Ahora, calculando las segundas derivadas parciales:

$$f_{xx}(x,y) = 6x + 6, \quad f_{yy}(x,y) = 6y - 6 = 0, \quad f_{xy} = 0$$
$$\implies D(x,y) = (6x+6)(6y-6)$$

Luego,

$$D(-2,2) = -36 \tag{a}$$
$$D(-2,0) = 36 \tag{b}$$
$$D(0,2) = 36 \tag{c}$$
$$D(0,0) = -36 \tag{d}$$

Finalmente,

- En $(-2,2)$ hay punto silla.
- Para $(-2,0)$, $D > 0$ y $f_{xx} < 0$, entonces se alcanza un máximo local.
- Para $(0,2)$, $D > 0$ y $f_{xx} > 0$, entonces se alcanza un mínimo local.
- En $(-2,0)$ hay punto silla.

Distrubución de puntaje:

- **0.1 pts:** Calcular correctamente cada una de las primeras derivadas.
- **0.1 pts:** Encontrar correctamente cada punto crítico.
- **0.2 pts:** Calcular correctamente cada una de las segundas derivadas, es decir, f_{xx},f_{yy},f_{xy}.
- **0.2 pts:** Calcular correctamente $D(x, y)$.
- **0.1 pts:** Por evaluar $D(x, y)$ en cada punto crítico correctamente.
- **0.1 pts:** Por evaluar $f_{xx}(-2, 0)$ correctamente.
- **0.1 pts:** Por evaluar $f_{xx}(0, 2)$.
- **0.25 pts:** Concluir correctamente la clasificación de cada punto crítico.

b) Encuentre, en caso de existir, los máximos y mínimos absolutos de la función $f(x, y) = xy$ sobre la región $4x^2 + y^2 \leq 8$.
Solución:

Dado que la función $f(x, y)$ es continua y la región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 8\}$ es un conjunto cerrado y acotado, el Teorema de Valores Extremos garantiza la existencia de máximos y mínimos absolutos. Para hallarlos, analizamos los puntos críticos en el interior y los extremos en la frontera.

Para los puntos críticos en el interior ($4x^2 + y^2 < 8$), calculamos el gradiente de f y lo igualamos al vector nulo:

$$\nabla f(x, y) = (y, x) = (0, 0)$$

El único punto crítico es $P_0 = (0, 0)$. Verificamos que

$$4(0)^2 + (0)^2 = 0 < 8$$

por lo que pertenece a la región, y el valor de la función en el punto es:

$$f(0, 0) = 0$$

Para encontrar puntos en la frontera, utilizamos el método de los Multiplicadores de Lagrange. Definimos la restricción $g(x, y) = 4x^2 + y^2 = 8$. Notamos que $\nabla g = (8x, 2y) \neq (0, 0)$. Buscamos resolver $\nabla f = \lambda \nabla g$:

$$(y, x) = \lambda(8x, 2y)$$

Esto genera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$y = 8\lambda x \tag{1}$$
$$x = 2\lambda y \tag{2}$$
$$4x^2 + y^2 = 8 \tag{3}$$

Sustituyendo (1) en (2):

$$x = 2\lambda(8\lambda x) = 16\lambda^2 x$$

$$x(1 - 16\lambda^2) = 0$$

De aquí surgen dos casos:

- **Caso A:** $x = 0$. Si $x = 0$, por (1) $y = 0$. Sin embargo, el punto $(0, 0)$ no satisface la restricción de frontera (3). Se descarta.
- **Caso B:** $1 - 16\lambda^2 = 0 \implies \lambda^2 = \frac{1}{16} \implies \lambda = \pm\frac{1}{4}$.

Si $\lambda = \frac{1}{4}$: Sustituyendo en (1): $y = 8(\frac{1}{4})x \implies y = 2x$. Reemplazamos en la restricción (3):

$$4x^2 + (2x)^2 = 8 \implies 4x^2 + 4x^2 = 8 \implies 8x^2 = 8 \implies x = \pm 1$$

Obtenemos los puntos $P_1(1, 2)$ y $P_2(-1, -2)$. Evaluamos f:

$$f(1, 2) = (1)(2) = 2$$

$$f(-1, -2) = (-1)(-2) = 2$$

Si $\lambda = -\frac{1}{4}$: Sustituyendo en (1): $y = 8(-\frac{1}{4})x \implies y = -2x$. Reemplazamos en la restricción (3):

$$4x^2 + (-2x)^2 = 8 \implies 8x^2 = 8 \implies x = \pm 1$$

Obtenemos los puntos $P_3(1, -2)$ y $P_4(-1, 2)$. Evaluamos f:

$$f(1, -2) = (1)(-2) = -2$$

$$f(-1, 2) = (-1)(2) = -2$$

Por lo tanto:

- **Máximo absoluto:** 2, alcanzado en los puntos $(1, 2)$ y $(-1, -2)$.
- **Mínimo absoluto:** -2, alcanzado en los puntos $(1, -2)$ y $(-1, 2)$.

Distrubución de puntaje:

- **0.4 pts:** Justifica existencia de máximo y mínimo absoluto.
- **0.5 pts:** Identifica punto crítico $(0, 0)$.
- **0.5 pts:** Plantea correctamente el sistema de ecuaciones utilizando Multiplicadores de Lagrange para la frontera.
- **0.5 pts:** Encuentra puntos $(1, 2)$. y $(-1, -2)$
- **0.5 pts:** Encuentra puntos $(-1, 2)$ y $(1, -2)$.
- **0.6 pts:** Evalúa e identifica máximo y mínimo absoluto.

Problema 2

a) Encuentre el volumen de la región sobre el plano $z = 0$, bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, donde $a > 0$ es constante.
Solución:
Note que

$$V = \int\int_{D_a} (x^2 + y^2) dA,$$

donde $D_a = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 \leq a^2\}$. Usando coordenadas polares se sigue que

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^a r^3 \cdot r dr d\theta = 2\pi \frac{r^4}{4}\Big|_{r=0}^{r=a} = \frac{\pi a^4}{2}.$$

Nota: También se puede calcular el volumen mediante coordenadas cilíndricas mediante la siguiente fórmula

$$V = \iiint_{S_a} 1 dV,$$

donde $S_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq a^2,\ 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$. En efecto, haciendo $x = r\cos\theta, y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, z = z$, obtenemos que las ecuaciones del paraboloide y del cilindro son, respectivamente

$$z = r^2, \quad r = a$$

Así, la nueva región de integración esta dada por

$$\left\{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq r^2\right\}.$$

Luego, en coordenadas cilíndricas V viene dado por

$$V = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{r^2} r \ \mathrm{d}z \ \mathrm{d}\theta \ \mathrm{d}r = \int_0^a \int_0^{2\pi} r^3 \ \mathrm{d}\theta \ \mathrm{d}r = 2\pi \int_0^a r^3 \ \mathrm{d}r = \frac{\pi a^4}{2}$$

Distribución puntaje:

- (**0.5 pts**) Identificar la región de integración: D_a en la forma 1, S_a para la forma 2
- (**0.5 pts**) Fórmula de volumen con el integrando correcto: $x^2 + y^2$ en la forma 1, 1 en la forma 2.
- (**0.5 pts**) Proponer el cambio de variables: coordenadas polares en forma 1, coordenadas cilíndricas en forma 2.
- (**0.5 pts**) Efectuar el cambio de variables, incluyendo el Jacobiano.
- (**0.5 pts**) Integrar de manera correcta.
- (**0.5 pts**) Dar la respuesta correcta..

b) Calcule el volumen del sólido definido por $x^2 + y^2 \leq 1$ con $x, y \geq 0$ y $0 \leq z \leq 1 - x$.
Solución:

El sólido está descrito por el cuarto de cilindro sólido en el primer octante que es cortado por el plano $x + z = 1$. Definimos dicha región como

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 1, \quad , x, y \geq 0, \quad 0 \leq z \leq 1 - x\}.$$

De manera que el volumen viene dado por

$$V = \iiint_E dV.$$

En coordenadas cilíndricas E se puede representar por la siguiente región

$$R = \left\{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \colon r \in [0, 1], \quad \theta \in [0, \pi/2], \quad 0 \leq z \leq 1 - r\cos(\theta)\right\}.$$

Luego,

$$V = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^{1-r\cos(\theta)} r dz dr d\theta.$$

Integrando en z y r se tiene que

$$V = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r - r^2\cos(\theta) dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos(\theta)\right) d\theta.$$

Se sigue que

$$V = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\left(\sin(\theta)\right)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} = \frac{3\pi - 4}{12} > 0.$$

Distribución puntaje:

- (**0.5 pts**) Identificar la región de integración E
- (**0.5 pts**) Fórmula de volumen con el integrando correcto 1
- (**0.5 pts**) Proponer el cambio de variables en coordenadas cilíndricas.
- (**0.5 pts**) Efectuar el cambio de variables, incluyendo el Jacobiano.
- (**0.5 pts**) Integrar de manera correcta.
- (**0.5 pts**) Dar la respuesta correcta..

Es posible ocupar una integral doble para calcular el volumen: Esta forma debería ser

$$\iint_D 1 - x dA, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1, \ \ x, y \geq 0\}.$$

En caso de ésta estrategia, de manera análoga como la forma 1 del Problema 2.a.

Problema 3

Considere la región $\mathcal{R}$ encerrada por las curvas $x = y^2$, $x = 3y^2$, $x^2 = y$ y $x^2 = 2y$. Utilice el cambio de variable $u = \dfrac{x}{y^2}$, $v = \dfrac{x^2}{y}$ para evaluar la integral

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{1}{x^3} dA$$

(Sugerencia: Puede ser útil calcular $\dfrac{u}{v^2}$ *y* $\dfrac{1}{3u^2}$*)*

Solución:

Consideremos el cambio de variable $u = \dfrac{x}{y^2}$, $v = \dfrac{x^2}{y}$. La imagen de la región $\mathcal{R}$ se obtiene evaluando la frontera:

- $x = y^2 \implies u = 1$
- $x = 3y^2 \implies u = 3$
- $x^2 = y \implies v = 1$
- $x^2 = 2y \implies v = 2$

Por lo que la región en el plano uv es el rectángulo $D_{uv} = [1, 3] \times [1, 2]$.

Calculamos el Jacobiano de la transformación inversa $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & -\frac{2x}{y^3} \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \end{pmatrix} = -\frac{x^2}{y^4} + \frac{4x^2}{y^4} = \frac{3x^2}{y^4}$$

El Jacobiano para el diferencial de área dA es el recíproco:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{3x^2}{y^4}} = \frac{y^4}{3x^2}$$

Notamos que

$$\frac{1}{3u^2} = \frac{1}{3\frac{x^2}{y^4}} = \frac{y^4}{3x^2}$$

Por lo tanto, el Jacobiano en términos de u y v es: $J = \frac{1}{3u^2}$

Además, tenemos que

$$\frac{u}{v^2} = \frac{\frac{x}{y^2}}{\left(\frac{x^2}{y}\right)^2} = \frac{\frac{x}{y^2}}{\frac{x^4}{y^2}} = \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{R}} \frac{1}{x^3} dA &= \iint_{D_{uv}} \frac{u}{v^2} |J| dA \\
&= \int_1^2 \int_1^3 \left(\frac{u}{v^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3u^2}\right) du\, dv \\
&= \frac{1}{3} \int_1^2 \int_1^3 \frac{1}{uv^2}\, du\, dv \\
&= \frac{1}{3} \left(\int_1^3 \frac{1}{u}\, du\right) \left(\int_1^2 v^{-2}\, dv\right) \\
&= \frac{1}{3} \ln(u) \Big|_1^3 \left(-\frac{1}{v}\right) \Big|_1^2 \\
&= \frac{1}{3} (\ln 3) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln 3}{6}
\end{aligned}$$

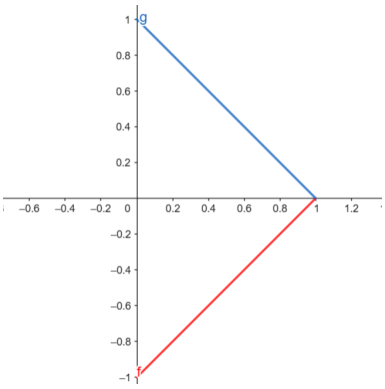
Distribución de puntaje:

- **1 pt:** Determina correctamente la región para u y v ($u \in [1,3]$, $v \in [1,2]$).
- **0.8 pt:** Calcula correctamente $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$, o despeja x e y en términos de u y v.
- **0.7 pt:** Calcula correctamente $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ en términos de u y v. *En caso de error en* $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$, *asignar este puntaje siempre y cuando sea consistente.*
- **1 pt:** Identifica correctamente que $\frac{1}{x^3} = \frac{u}{v^2}$.
- **1.5 pt:** Realiza correctamente el cambio de variable. *En caso de error en partes anteriores, asignar este puntaje siempre y cuando sea consistente, y la integral no dependa de* x *e* y.
- **0.5 pts:** Calcula correctamente la integral respecto a u.
- **0.5 pts:** Calcula correctamente la integral respecto a v.

Problema 4

Encuentre el volumen de una pirámide de base cuadrada cuya base en el plano XY es el cuadrado $[-1,1]\times[-1,1]$ y vértice $(0,0,1)$.
Solución: Si observamos los planos YZ y XY, podemos identificar ecuaciones de la rectas que permiten definir los intervalos para las variables x e y. Así,

- Plano YZ:



  donde g (recta azul) representa:

$$y=-z+1$$

  y f (recta roja) representa:

$$y=z-1$$

  . Es decir,

$$z-1\leq y\leq -z+1$$

- Plano XZ:
  Similar a lo hecho en el plano YZ, se puede concluir:

$$z-1\leq x\leq -z+1$$

Con esto, establecemos la región $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R}=\{(x,y,z):0\leq z\leq 1, z-1\leq y\leq -z+1, z-1\leq x\leq -z+1\}$$

Luego,

$$\int_0^1\int_{z-1}^{1-z}\int_{z-1}^{1-z}1dzdydx=\int_0^1\int_{z-1}^{1-z}(2-2z)dzdy=\int_0^1(2-2z)^2dz=\frac{4}{3}$$

$\therefore$ El volumen de la pirámide es $\frac{4}{3}$.

Distrubución de puntaje:

- **1 pts:** Identificar el intervalo de z.
- **1 pts:** Identificar el intervalo de y.

- **1 pts:** Identificar el intervalo de x.
- **1 pts:** Establcer correctamente la triple integral en la región.
- **2 pts:** Respuesta correcta.

Problema 5

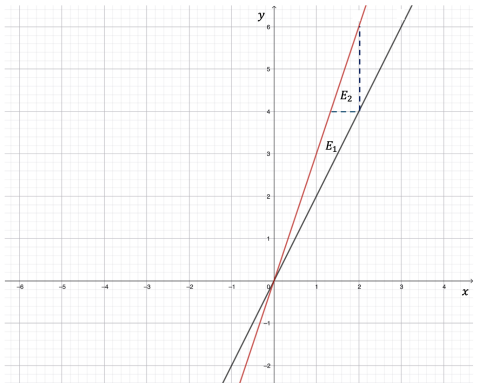
a) La siguiente integral iterada representa la integral triple de la función $f(x,y,z)$ en una región $\mathcal{R}$:

$$\int_0^2 \int_{2x}^{3x} \int_0^{5-3x} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

Escriba esta integral triple como integral iterada en orden $dz\ dx\ dy$.
Solución:

$$\int_0^2 \int_{2x}^{3x} \int_0^{5-3x} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = \iint_E \left(\int_0^{5-3x} f(x,y,z)\,dz \right) dy\,dx$$

Analizando la región que corresponde a la proyección en el plano xy,



Debido al cambio en el orden de integración, la región E se debe dividir en las regiones E_1 y E_2 ($E = E_1 \cup E_2$),

$$= \iint_{E_1} \left(\int_0^{5-3x} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy \ + \iint_{E_2} \left(\int_0^{5-3x} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

$$= \int_0^4 \int_{y/3}^{y/2} \int_0^{5-3x} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy \ + \int_4^6 \int_{y/3}^{2} \int_0^{5-3x} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$$

Distribución de puntaje:

- **0,5 pts:** Identifica correctamente la región en el plano xy ($0 \le x \le 2$, $2x \le y \le 3x$).
- **0,5 pts:** Representa (o describe) correctamente la región E en el plano xy mediante las rectas $y = 2x$ y $y = 3x$, indicando que está acotada por $0 \le x \le 2$.
- **0,5 pts:** Determina correctamente el rango global de y ($0 \le y \le 6$).
- **0,5 pts:** Despeja correctamente x en función de y:

$$y = 2x \Rightarrow x = \frac{y}{2}, \qquad y = 3x \Rightarrow x = \frac{y}{3}.$$

- **0,5 pts:** Divide correctamente la región en dos partes (cambio de cota superior en x), y plantea correctamente:

$$E_1: \ 0 \leq y \leq 4, \ \frac{y}{3} \leq x \leq \frac{y}{2}, \qquad E_2: \ 4 \leq y \leq 6, \ \frac{y}{3} \leq x \leq 2.$$

- **0,5 pts:** Escribe correctamente la integral triple equivalente en el orden $dz\,dx\,dy$.

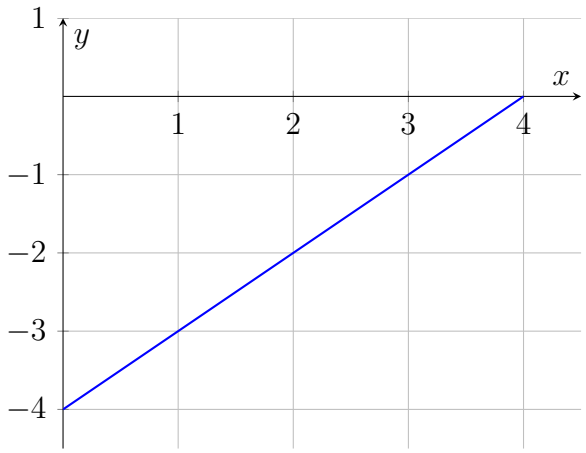
b) Utilice el orden más conveniente y calcule le siguiente integral:

$$\int\int xe^x \, dA$$

tal que $\mathcal{R}$ es la región acotada por $y = 4 - x, \ y = 0, \ x = 0$.

Solución:

Veamos la gráfica de la región:



Consideremos entonces el siguiente orden de integración:

$$\int_0^4 \int_{x-4}^0 xe^x dy dx = \int_0^4 xe^x(4-x)dx = \int_0^4 (4xe^x)dx - \int_0^4 (x^2e^x)dx$$

Integrando por partes, obtenemos:

$$\int_0^4 (4xe^x)dx - \int_0^4 (x^2e^x)dx = 12e^4 + 4 - 10e^4 + 2 = 2e^4 + 6$$

Distrubución de puntaje:

- **1 pts:** Plantear correctamente la doble integral con sus límites de integración. (según el orden, que tenga sentido)
- **0.5 pts:** Por calcular $\int_0^4 (4xe^x)dx$ o equivalente.
- **0.5 pts:** Por calcular $\int_0^4 (x^2e^x)dx$ o equivalente.
- **1 pts:** Respuesta correcta.