Pauta Interrogación - I3

Problema 1

a) **(3 pts.)** Calcule la aproximación lineal de la función f definida por:

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

en $(3,2,6)$ y , úsela para aproximar $\sqrt{(3{,}02)^2+(1{,}97)^2+(5{,}99)^2}$.

b) **(3 pts.)** Considere los vectores $\overrightarrow{u} = \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle$ y $\overrightarrow{v} = \left\langle -\frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \right\rangle$.

Suponga que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es **diferenciable** en el punto $(-1,1)$ y que

$$D_u f(-1,1) = 10 \qquad \text{y} \qquad D_v f(-1,1) = 5$$

Determine $\nabla f(-1,1)$ y $D_w f(-1,1)$ donde w es un vector unitario paralelo al vector $\langle -1,1 \rangle$.

Una Solución:

a) Notemos que $f(3,2,6) = \sqrt{3^2+2^2+6^2} = \sqrt{49} = 7$.

Calculamos $\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$

Así, $\nabla f(3,2,6) = \left(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7} \right)$.

Tenemos que

$$L(x,y,z) = f(3,2,6) + f_x(3,2,6)(x-3) + f_y(3,2,6)(y-2) + f_z(3,2,6)(z-6)$$

Por lo que, $L(x,y,z) = 7 + \frac{3}{7}(x-3) + \frac{2}{7}(y-2) + \frac{6}{7}(z-6)$.

Para $(x,y,z) = (3{,}02, 1{,}97, 5{,}99)$, se tiene:

$$x-3 = \frac{2}{100}, \quad y-2 = -\frac{3}{100}, \quad z-6 = -\frac{1}{100}.$$

Sustituyendo en L:

$$\begin{aligned} L(3{,}02, 1{,}97, 5{,}99) &= 7 + \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{100} + \frac{2}{7}\cdot\left(-\frac{3}{100}\right) + \frac{6}{7}\cdot\left(-\frac{1}{100}\right) \\ &= 7 + \frac{6-6-6}{700} = 7 - \frac{6}{700} \\ &= 7 - \frac{3}{350} = \frac{2450}{350} - \frac{3}{350} = \frac{2447}{350}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando la aproximación lineal:

$$\sqrt{(3{,}02)^2 + (1{,}97)^2 + (5{,}99)^2} \approx \frac{2447}{350}.$$

b) Notemos que $\overrightarrow{u} = \left\langle \frac{3}{5}\ , \frac{4}{5} \right\rangle = \frac{1}{5}\langle 3\ , 4\rangle$ y $\overrightarrow{v} = \left\langle -\frac{4}{5}\ , -\frac{3}{5} \right\rangle = \frac{1}{5}\langle -4\ , -3\rangle$.

Como f es diferenciable, entonces

$$\begin{cases} D_u f(-1,1) = \nabla f(-1,1)\cdot \overrightarrow{u} &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) \right\rangle \cdot \frac{1}{5}\langle 3\ , 4\rangle \\ &= \frac{1}{5}\left(3\cdot \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) + 4\cdot \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)\right) \\ D_v f(-1,1) = \nabla f(-1,1)\cdot \overrightarrow{v} &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) \right\rangle \cdot \frac{1}{5}\langle -4\ , -3\rangle \\ &= \frac{1}{5}\left(-4\cdot \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) - 3\cdot \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)\right) \end{cases}$$

Como $D_u f(-1,1) = 10$ y $D_v f(-1,1) = 5$, tenemos

$$\begin{cases} \frac{1}{5}\left(3\cdot \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) + 4\cdot \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)\right) = 10 \quad \Rightarrow \quad 3\cdot \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) + 4\cdot \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = 50 \\ \frac{1}{5}\left(-4\cdot \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) - 3\cdot \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)\right) = 5 \quad \Rightarrow \quad -4\cdot \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) - 3\cdot \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = 25 \end{cases}$$

De donde $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = -\frac{250}{7}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = \frac{275}{7}$, y por lo tanto

$\nabla f(-1,1) = \left\langle -\frac{250}{7}, \frac{275}{7} \right\rangle$.

Como w es un vector unitario en la misma dirección del vector $\langle -1, 1\rangle$, entonces

$$w = \frac{1}{\|\langle -1,1\rangle\|}\langle -1,1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\langle -1,1\rangle = \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$$

y

$$D_w f(-1,1) = \nabla f(-1,1)\cdot w = \left\langle -\frac{250}{7}, \frac{275}{7} \right\rangle \cdot \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle = \frac{525}{14}\sqrt{2}.$$

Problema 2 Una función f, diferenciable, se dice positivamente homogénea de grado $n \in \mathbb{N}$ si satisface la igualdad $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para todo $t > 0$.

a) **(3 pts.)** Demuestre que si f es positivamente homogénea de grado n, entonces $f_x(tx, ty) = t^{n-1} f_x(x, y)$.

b) **(3 pts.)** Demuestre que si

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = nf(x, y)$$

entonces f es positivamente homogénea de grado n.

[*Sugerencia:* Considere la función $\varphi(t) = \dfrac{f(tx, ty)}{t^n}$ y derive respecto a t.]

Una Solución:

a) Derivando ambos lados de la ecuación $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ con respecto a x tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f(tx, ty) &= \frac{\partial}{\partial x} t^n f(x, y) \\
\frac{\partial}{\partial (tx)} f(tx, ty) \cdot \frac{\partial (tx)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial (ty)} f(tx, ty) \cdot \frac{\partial (ty)}{\partial x} &= t^n \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \\
t\frac{\partial}{\partial (tx)} f(tx, ty) &= t^n f_x(x, y) \\
f_x(tx, ty) &= t^{n-1} f_x(x, y)
\end{aligned}$$

b) Usando la regla de derivación del cociente junto con la regla de la cadena obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \frac{\left(\dfrac{\partial}{\partial (tx)} f(tx, ty) \cdot \dfrac{\partial (tx)}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial (ty)} f(tx, ty) \cdot \dfrac{\partial (ty)}{\partial t}\right) \cdot t^n - f(tx, ty) \cdot nt^{n-1}}{(t^n)^2} \\
&= \frac{t^n \left(x\dfrac{\partial}{\partial (tx)} f(tx, ty) + y\dfrac{\partial}{\partial (ty)} f(tx, ty)\right) - nt^{n-1} f(tx, ty)}{t^{2n}} \\
&= \frac{t^{n-1} \left(tx\dfrac{\partial}{\partial (tx)} f(tx, ty) + ty\dfrac{\partial}{\partial (ty)} f(tx, ty) - nf(tx, ty)\right)}{t^{2n}} \\
&= \frac{t^{n-1} \left(nf(tx, ty) - nf(tx, ty)\right)}{t^{2n}} = 0
\end{aligned}$$

Luego, dado que $\varphi'(t) = 0$ para todo $t > 0$, concluimos que $\varphi(t)$ es una función constante. En particular, al reemplazar con $t = 1$, obtenemos que

$$\varphi(t) = \frac{f(tx, ty)}{t^n} = f(x, y) = \varphi(1),$$

de donde se concluye que $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$.

Por lo tanto, f es positivamente homogénea de grado n, tal como queríamos demostrar.

Problema 3

a) **(3 pts.)** La ecuación $\arctan(x+z) - 2ye^z = 0$ define implícitamente a z como función de x e y. Si $z = f(x, y)$, determine el mayor crecimiento de f en el punto $(0, 0)$ y la dirección en la cual se produce.

b) **(3 pts.)** Dada la función f, definida por $f(x, y) = -(x^2-1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$, determine los puntos críticos de f y señale de qué tipo son: máximos, mínimos (globales y/o locales) o puntos de silla.

Una Solución:

a) Se sabe que el mayor crecimiento de una función en un punto corresponde al módulo de su gradiente y que ocurre justamente en la dirección dada por este.

Definiendo $F(x, y, z) = \arctan(x + z) - 2ye^z$, y derivando implíciticamente, tenemos que:

$$f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = -\frac{\frac{1}{1+(x+z)^2}}{\frac{1}{1+(x+z)^2} - 2ye^z}$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = -\frac{-2e^z}{\frac{1}{1+(x+z)^2} - 2ye^z}$$

Notemos que para $x = 0$ e $y = 0$ se tiene que

$$\arctan(0 + z) - 2 \cdot 0 \cdot e^z = 0 \;\Rightarrow\; \arctan(z) = 0 \;\Rightarrow\; z = 0 \;\Rightarrow\; f(0, 0) = 0.$$

Así, $\nabla f(0,0) = \langle f_x(0,0), f_y(0,0)\rangle = \left\langle -\frac{F_x(0,0,0)}{F_z(0,0,0)}, -\frac{F_y(0,0,0)}{F_z(0,0,0)} \right\rangle = \langle -1, 2\rangle$

y $\|\nabla f(0,0)\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Por lo tanto, el mayor crecimiento de f en el punto $(0,0)$ es de $\sqrt{5}$ y se produce en la dirección del vector $\langle -1, 2\rangle$.

b) Determinemos las derivadas parciales:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -4x(x^2-1) - 2(x^2y - x - 1)(2xy - 1) \\ f_y(x,y) = -2x^2(x^2y - x - 1) \end{cases}$$

Calculemos los valores de x e y para que $\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$.

De $f_y(x,y) = 0$ obtenemos:

$$-2x^2(x^2y - x - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{o} \quad x^2y - x - 1 = 0.$$

- Si $x = 0$, entonces $f_x(0,y) = -2 \neq 0$, no hay punto crítico.
- Si $x^2y - x - 1 = 0$, sustituimos en $f_x(x,y) = 0$:

$$-4x(x^2-1) - 2(x^2y - x - 1)(2xy - 1) = -4x(x^2-1) = 0$$

pues el segundo término se anula por la condición. Luego $-4x(x^2-1) = 0$ implica $x = 0, 1, -1$.

Descartamos $x = 0$, ya que no satisface $f_x(x,y) = 0$.

Para $x = 1$: $1^2 \cdot y - 1 - 1 = 0 \Rightarrow y = 2$.

Para $x = -1$: $(-1)^2 \cdot y - (-1) - 1 = y + 1 - 1 = y = 0 \Rightarrow y = 0$.

Por lo tanto los puntos críticos son $(1,2)$ y $(-1,0)$.

Notemos que la función f se puede escribir como

$$f(x,y) = -\left[(x^2-1)^2 + (x^2y - x - 1)^2\right]$$

observemos que $f(x,y) \leq 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, y la igualdad $f(x,y) = 0$ ocurre únicamente cuando

$$(x^2-1)^2 = 0 \quad \text{y} \quad (x^2y - x - 1)^2 = 0,$$

es decir, en $(1,2)$ y $(-1,0)$.

Por lo tanto, ambos puntos son máximos globales (y por tanto locales). No hay mínimos ni puntos de silla.

Criterios de corrección y asignación de puntaje Pregunta 1

a) *De la parte* a)

- **CC1 (0.5 pts)** por calcular correctamente $f(3,2,6)$.
- **CC2 (0.5 pts)** por determinar correctamente ∇f.
- **CC3 (0.5 pts)** por evaluar correctamente $\nabla f(3,2,6)$.
- **CC4 (0.5 pts)** por expresar correctamente la aproximación lineal.
- **CC5 (0.5 pts)** por sustituir correctamente los incrementos ($x-3=0,02;\ y-2=-0,03;\ z-6=-0,01$).
- **CC6 (0.5 pts)** por obtener correctamente la aproximación.

b) *De la parte* b)

- **CC7 (0.4 pts)** por expresar correctamente $D_u f(-1,1)$.
- **CC8 (0.4 pts)** por expresar correctamente $D_v f(-1,1)$.
- **CC9 (0.4 pts)** por establecer correctamente el sistema de ecuaciones.
- **CC10 (0.5 pts)** por calcular correctamente $f_x(-1,1)$.
- **CC11 (0.5 pts)** por calcular correctamente $f_y(-1,1)$.
- **CC12 (0.2 pts)** por determinar correctamente $\nabla f(-1,1)$.
- **CC13 (0.3 pts)** por determinar correctamente el vector w.
- **CC14 (0.3 pts)** por calcular correctamente $D_w f(-1,1)$.

Criterios de corrección y asignación de puntaje Pregunta 2

a) *De la parte* a)

- **CC1 (0.5 pts)** por establecer correctamente que se debe derivar con respecto a x a ambos lados de la igualdad.
- **CC2 (1.0 pts)** por derivar correctamente $f(tx,ty)$, aplicando regla de la cadena.
- **CC3 (1.0 pts)** por derivar correctamente $t^n f(x,y)$.
- **CC4 (0.5 pts)** por igualar correctamente los resultados y despejar para obtener la relación pedida.

b) *De la parte* b)

- **CC5 (0.5 pts)** por derivar correctamente $\varphi(t)$ aplicando: primero la regla del cociente.
- **CC6 (1.0 pts)** por derivar correctamente $\varphi(t)$ aplicando: segundo la regla de la cadena.
- **CC7 (0.5 pts)** por simplificar correctamente $\varphi'(t)$ y concluir que es $\varphi'(t)=0$.

- **CC8 (0.5 pts)** por concluir correctamente que $\varphi(t)$ es una función constante.
- **CC9 (0.5 pts)** por concluir correctamente $\varphi(t) = \varphi(1)$ y por tanto $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$.

Criterios de corrección y asignación de puntaje Pregunta 3

a) *De la parte* a)

- **CC1 (0.3 pts)** por señalar correctamente cuándo ocurre la derivada direccional máxima.
- **CC2 (0.2 pts)** por definir correctamente $F(x, y, z)$.
- **CC3 (0.2 pts)** por calcular correctamente las derivada parcial $F_x(x, y, z)$.
- **CC4 (0.2 pts)** por calcular correctamente las derivada parcial $F_y(x, y, z)$.
- **CC5 (0.2 pts)** por calcular correctamente las derivada parcial $F_z(x, y, z)$.
- **CC6 (0.5 pts)** por aplicar correctamente derivación implícita.
- **CC7 (0.3 pts)** por evaluar correctamente en la condición $(x, y) = (0, 0)$ y así obtener $z = 0$.
- **CC8 (0.3 pts)** por calcular correctamente $f_x(0, 0)$.
- **CC9 (0.3 pts)** por calcular correctamente $f_y(0, 0)$.
- **CC10 (0.2 pts)** por determinar correctamente $\nabla f(0, 0)$.
- **CC11 (0.3 pts)** por calcular correctamente el módulo de $\nabla f(0, 0)$.

b) *De la parte* b)

- **CC12 (0.5 pts)** por calcular correctamente las derivada parcial $f_x(x, y)$.
- **CC13 (0.5 pts)** por calcular correctamente las derivada parcial $f_y(x, y)$.
- **CC14 (0.3 pts)** por establecer correctamente el sistema de ecuaciones para determinar los valores de x e y.
- **CC15 (0.6 pts)** por determinar correctamente los valores de x e y.
- **CC16 (0.3 pts)** por determinar correctamente los puntos críticos.
- **CC17 (0.4 pts)** por clasificar correctamente que $(1, 2)$ es máximo global.
- **CC18 (0.4 pts)** por clasificar correctamente que $(-1, 0)$ es máximo global.