Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 – Cálculo 2
Temporada Académica de Verano 2026

# Interrogación 2
## Solución

---

## Problema 1

**[6pt]** Sea $\vec{\mathbf{a}}$ el vector con punto inicial $A(1,3,2)$ y punto final $B(-5,7,3)$. Si $\vec{\mathbf{b}}$ es un vector unitario en el plano $YZ$, perpendicular al vector $\vec{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, ¿cuál es el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$?

*Solución.* Cálculo del vector $\vec{a}$:

$$\vec{a} = B - A = (-5-1, 7-3, 3-2) = \langle -6, 4, 1 \rangle$$

Cálculo del vector $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ Usando que el vector es perpendicular a $\vec{c}$ obtenemos la ecuación:

$$b_1 * 4 + b_2 * -3 + b_3 * 1 = 0$$

Como el vector $\vec{b}$ está en el plano $YZ$ se tiene que $b_1 = 0$ y por lo tanto

$$b_3 = 3b_2$$

Luego como es un vector unitario se tiene que

$$1 = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} = \sqrt{b_2^2 + (3b_2)^2} = \sqrt{10}|b_2|$$

Por lo tanto hay solo dos valores posibles para el vector $\vec{b}$ que son $\langle 0, \frac{\sqrt{10}}{10}, 3\frac{\sqrt{10}}{10} \rangle$ o $\langle 0, -\frac{\sqrt{10}}{10}, -3\frac{\sqrt{10}}{10} \rangle$.

Como el área de un paralelogramo es siempre positiva y depende de la magnitud del producto vectorial, ambos posibles vectores $\vec{b}$ darán el mismo resultado.

Tomamos el vector $\vec{b} = \langle 0, \frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{3\sqrt{10}}{10} \rangle$. El área del paralelogramo está dada por la magnitud del producto cruz $\vec{a} \times \vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -6 & 4 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{3\sqrt{10}}{10} \end{vmatrix}$$

Calculando las componentes:

- Componente **i**: $4\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) - 1\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = \frac{12\sqrt{10}-\sqrt{10}}{10} = \frac{11\sqrt{10}}{10}$
- Componente **j**: $-\left[-6\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) - 0\right] = \frac{18\sqrt{10}}{10}$
- Componente **k**: $-6\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right) - 0 = -\frac{6\sqrt{10}}{10}$

Luego, el vector producto cruz es $\vec{a} \times \vec{b} = \left\langle \frac{11\sqrt{10}}{10}, \frac{18\sqrt{10}}{10}, -\frac{6\sqrt{10}}{10} \right\rangle$.
Finalmente, calculamos el área como la magnitud de dicho vector:

$$\text{Área} = \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{\left(\frac{11\sqrt{10}}{10}\right)^2 + \left(\frac{18\sqrt{10}}{10}\right)^2 + \left(-\frac{6\sqrt{10}}{10}\right)^2}$$

$$\text{Área} = \sqrt{\frac{121(10)}{100} + \frac{324(10)}{100} + \frac{36(10)}{100}} = \sqrt{\frac{121+324+36}{10}} = \sqrt{\frac{481}{10}}$$

Por lo tanto, el área del paralelogramo es $\sqrt{48.1}$ unidades cuadradas.

□

---

**Distribución del puntaje**

- **C1:** 1p por determinar el vector $\vec{a}$
- **C2:** 0.5p por usar correctamente la condición de que $\vec{b}$ pertenece al plano $YZ$
- **C3:** 0.5p por usar correctamente la condición de perpendicularidad entre $\vec{b}$ y $\vec{c}$
- **C4:** 0.5p por usar correctamente la condición de que $\vec{b}$ es unitario.
- **C5:** 1p por determinar los dos posibles vectores que puede ser $\vec{b}$
- **C6:** 0.5p por usar que $A = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$
- **C7:** 1p por calcular correctamente el producto cruz $\vec{a} \times \vec{b}$
- **C8:** 1p por determinar el área del paralelogramo correctamente

## Problema 2

a) **[3pt]** Determine y grafique el dominio de la siguiente función:

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{y-x^2}}.$$

b) **[3pt]** Determine el recorrido y dibuje un mapa de contorno de la función

$$g(x,y) = \sqrt{y-x^2}.$$

(El mapa de contorno debe incluir al menos 5 curvas de nivel no vacías).

*Solución.*

a) Determinación del dominio de $f(x,y) = \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{y-x^2}}$:

Para que la función esté bien definida en los números reales, el argumento de la raíz debe ser no negativo y el denominador debe ser distinto de cero. Es decir:

$$\frac{1-x^2-y^2}{y-x^2} \geq 0 \quad \text{con} \quad y-x^2 \neq 0$$

Analizamos los dos casos posibles para que el cociente sea mayor o igual a cero:

**Caso 1: Numerador $\geq 0$ y Denominador $> 0$**

$$1-x^2-y^2 \geq 0 \implies x^2+y^2 \leq 1$$

$$y-x^2 > 0 \implies y > x^2$$

Este caso corresponde a los puntos que están **dentro o sobre** la circunferencia unitaria y estrictamente **sobre** la parábola $y = x^2$.

**Caso 2: Numerador $\leq 0$ y Denominador $< 0$**

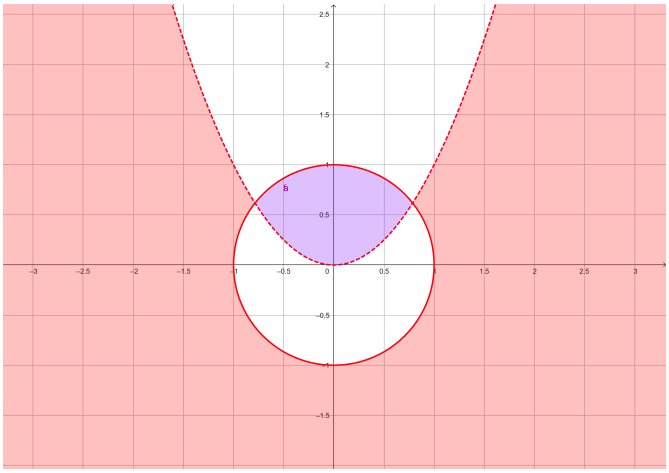
$$1-x^2-y^2 \leq 0 \implies x^2+y^2 \geq 1$$

$$y-x^2 < 0 \implies y < x^2$$

Este caso corresponde a los puntos que están **fuera o sobre** la circunferencia unitaria y estrictamente **bajo** la parábola $y = x^2$.

Por lo tanto el dominio es el conjunto:

$$\text{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2 \leq 1 \wedge y > x^2) \vee (x^2+y^2 \geq 1 \wedge y < x^2)\}$$



Dominio de $f$

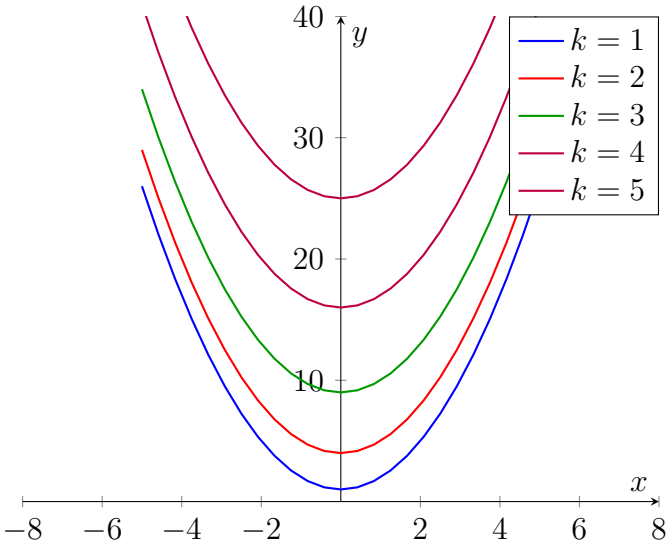
b) Notemos que por definición de la función raíz,

$$\sqrt{y-x^2} \geq 0$$

$\Rightarrow Rec(f) = [0, \infty[$.
Con esto, consideremos cinco valores positivos para $k$ tal que $\sqrt{y-x^2} = k$ :

$$\begin{aligned}
1 &= \sqrt{y-x^2} \Rightarrow y = x^2 + 1 \\
2 &= \sqrt{y-x^2} \Rightarrow y = x^2 + 4 \\
3 &= \sqrt{y-x^2} \Rightarrow y = x^2 + 9 \\
4 &= \sqrt{y-x^2} \Rightarrow y = x^2 + 16 \\
5 &= \sqrt{y-x^2} \Rightarrow y = x^2 + 25
\end{aligned}$$

Luego, un mapa de cortorno es:



□

**Distribución de puntaje**
**Parte a)**

- **C1a:** 0.5p por determinar los puntos donde el denominador se anula
- **C2a:** 0.5p por plantear los casos en que el argumento de la raíz es no negativo
- **C3a:** 0.5p por determinar las condiciones necesarias para el caso 1
- **C4a:** 0.5p por determinar las condiciones necesarias para el caso 2
- **C5a:** 1p por graficar el dominio correctamente

**Parte b)**

- **C1b:** 1p por calcular el recorrido (ya sea con la definición de la función o algún cálculo).
- **C2b:** 0.5p por considerar cinco valores mayores o iguales a cero para $k$.
- **C3b:** 0.5p por encontrar la forma $y = x^2 + k^2$. (haciendo las cuentas para despejar $y$ o haber considerado graficar parábolas para obtener este puntaje).
- **C4b:** 0.2p por graficar correctamente cada curva de nivel indicando el valor de $k$ correspondiente.

## Problema 3

**[6pt]** Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y^k}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

determine los valores de $k \in \mathbb{R}$ de modo tal que la función sea continua en el origen.

*Solución.*

Sea

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) &= \lim_{\rho\to 0} \frac{(\rho\cos\theta)(\rho\sin\theta)^k}{(\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2} \\ &= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^{k+1}\cos\theta\,\sin^k\theta}{\rho^2} \\ &= \lim_{\rho\to 0} \rho^{k-1}\cos\theta\,\sin^k\theta. \end{aligned}$$

- Si $k > 1$, como $|\cos\theta\,\sin^k\theta| \leq 1$,

$$\lim_{\rho\to 0} \rho^{k-1}\cos\theta\,\sin^k\theta = 0$$

- Si $k = 1$,

$$\lim_{\rho\to 0} \cos\theta\,\sin\theta \quad \text{depende de } \theta$$

  Por lo tanto, el límite no existe.

- Si $k < 1$,

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\cos\theta\,\sin^k\theta}{\rho^{1-k}} \quad \text{no existe,}$$

  La función no es acotada en el origen.

Finalmente, la función es continua en el origen si $k > 1$.

□

---

**Distribución de puntaje**

- **C1:** 0.5p por saber que $f$ es continua en el origen si y solo si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe y es igual a $f(0,0) = 0$. (Puede estar implícito en el desarrollo).
- **C2:** 1p por el cambio de coordenadas polares.
- **C3:** 1p por reemplazar el cambio de coordenadas en $f$ y simplificar correctamente.

- **C4:** 1p por demostrar que si $k > 1$, el límite existe y vale 0.
- **C5:** 1p por demostrar que en el caso $k = 1$, el límite no existe pues depende de $\theta$ (o bien, por probar dos trayectorias donde el límite sea distinto).
- **C6:** 1p por demostrar que si $k < 1$, el límite no existe pues la función no es acotada (o bien, que por cualquier trayectoria rectilínea con $\theta \neq k\frac{\pi}{2}$ el límite es infinito, o bien, por encontrar una trayectoria para la que el límite no existe).
- **C7:** 0.5p por concluir que $f$ es continua si y solo si $k > 1$ (puede estar la conclusión de continuidad en cada caso).

## Problema 4

**[6pt]** Encuentre la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2y$ que sea perpendicular a la recta:

$$x = 2t, \quad y = 3 - 2t, \quad z = 4 - t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

*Solución.*

La ecuación del plano tangente a la gráfica de $f$ en un punto $P(x_0, y_0)$ es

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0)f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

o, equivalentemente,

$$f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0)f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - z = 0$$

El vector normal del plano es, por tanto,

$$\vec{n} = \langle f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1\rangle = \langle 2x_0, 2y_0 + 2, -1\rangle$$

De forma equivalente, se puede justificar afirmando que $z = x^2 + y^2 + 2y \iff x^2 + y^2 + 2y - z = 0$. Luego, si $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2y - z$, entonces el vector normal al plano tangente es $\nabla F(x_0, y_0, z_0) = \langle 2x_0, 2y_0 + 2, -1\rangle$, donde $z_0 = f(x_0, y_0)$, y el plano tangente es

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Para que el plano tangente sea perpendicular a la recta dada, el vector normal del plano ($\vec{n}$) debe ser paralelo al vector director de la recta $\vec{d} = \langle 2, -2, -1\rangle$:

$$\langle 2x_0, 2y_0 + 2, -1\rangle = \lambda\langle 2, -2, -1\rangle$$

Igualando componentes, obtenemos que $\lambda = 1$, por lo que

$$2x_0 = 2 \implies x_0 = 1$$
$$2y_0 + 2 = -2 \implies 2y_0 = -4 \implies y_0 = -2$$

Reemplazando en la ecuación del plano tangente, tenemos que

$$z = 1 + 2(x - 1) - 2(y + 2) \implies 2x - 2y - z = 5.$$

□

---

**Distribución de puntaje:**

- **C1:** 0.5p por conocer la fórmula de plano tangente usando $z = f(x, y)$ o $F(x, y, z) = 0$.
- **C2:** 1p por identificar que el vector normal al plano tangente es $\vec{n} = \langle f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1\rangle$ o $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$.
- **C3:** 1p por calcular las derivadas parciales correspondientes.

- **C4:** 1p por identificar que el vector director $\vec{d}$ de la recta.
- **C5:** 1p por igualar $\vec{n} = \lambda\vec{d}$ (asignar 0.5p si solo igualan $\vec{n} = \vec{d}$ sin justificar por qué).
- **C6:** 1p por identificar $x_0 = 1$, $y_0 = -2$ y $z_0 = 1$.
- **C7:** 0.5p por la ecuación del plano tangente (no es necesario desarrollarla).

## Problema 5

a) **[4pt]** Sea $g(u,v)$ una función diferenciable y $f(x,y,z) = xg\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$. Demuestre que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = f.$$

b) **[2pt]** Sea $f(x,y) = 2x^2 - xe^y$, y $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$. Calcule $D_{\mathbf{u}}(f)$ en el punto $(1,0)$, justificando todos sus pasos.

*Solución.*

a) Sea $f(x,y,z) = xg(u,v)$, donde definimos las variables intermedias:

$$u = \frac{y}{x} \quad \text{y} \quad v = \frac{z}{x}.$$

Calculamos las derivadas parciales de $u$ y $v$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{z}{x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{x}.$$

Aplicamos la Regla de la Cadena para hallar las derivadas parciales de $f$, la que podemos utilizar debido a que $g$ es diferenciable. Denotamos $g_u = \frac{\partial g}{\partial u}$ y $g_v = \frac{\partial g}{\partial v}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 1 \cdot g(u,v) + x\left(g_u\frac{\partial u}{\partial x} + g_v\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
&= g(u,v) + x\left(g_u\left(-\frac{y}{x^2}\right) + g_v\left(-\frac{z}{x^2}\right)\right) \\
&= g(u,v) - \frac{y}{x}g_u - \frac{z}{x}g_v \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= x\left(g_u\frac{\partial u}{\partial y}\right) = x \cdot g_u\left(\frac{1}{x}\right) = g_u \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= x\left(g_v\frac{\partial v}{\partial z}\right) = x \cdot g_v\left(\frac{1}{x}\right) = g_v
\end{aligned}$$

Finalmente, sustituimos en la expresión solicitada:

$$\begin{aligned}
x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} &= x\left(g - \frac{y}{x}g_u - \frac{z}{x}g_v\right) + y(g_u) + z(g_v) \\
&= xg - yg_u - zg_v + yg_u + zg_v \\
&= xg \\
&= f(x,y,z)
\end{aligned}$$

b) Las derivadas parciales de $f$ son

$$f_x(x,y) = 4x - e^y, \quad f_y(x,y) = -xe^y$$

Ambas derivadas son continuas, por lo que $f$ es diferenciable. Por tanto, como $\mathbf{u}$ es unitario,

$$D_{\mathbf{u}}f(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{-4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$$

□

---

**Distribución de puntaje:**
**Parte a)**

- **C1a:** 1p por el uso correcto de regla de la cadena para derivar $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial z}$.
- **C2a:** 0.8p por el cálculo correcto de las derivadas intermedias $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial z}$ (0.2p cada una).
- **C3a:** 0.6p por el cálculo correcto de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.
- **C4a:** 0.3p por el cálculo correcto de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
- **C5a:** 0.3p por el cálculo correcto de $\dfrac{\partial f}{\partial z}$.
- **C6a:** 1p por verificar la igualdad solicitada.

**Parte b)**

- **C1b:** 0.5p por $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$.
- **C2b:** 0.5p por indicar que $f$ es diferenciable porque sus derivadas son continuas.
- **C3b:** 0.5p por indicar que $D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$.
- **C4b:** 0.5p por calcular correctamente $D_{\mathbf{u}}f(1,0)$.