Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 – Cálculo 2
Temporada Académica de Verano 2026

Interrogación 1
Solución

Problema 1

Estudie la convergencia de las siguientes integrales impropias:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\tan^2(x)}{\sqrt{x}\,(1-\cos x)}\,dx.$

(b) $\displaystyle\int_{2026}^{\infty} \frac{1}{(\ln x)^{2026}}\,dx.$

(Sugerencia: Estudie primero el caso

$$\int_{2026}^{\infty} \frac{1}{(\ln x)^3}\,dx,$$

y luego argumente de forma similar para el caso pedido**).**

Solución.

a) Note que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2(x)}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\tan^2(x)}{x^2}}{\frac{1-\cos(x)}{x^2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Luego, comparamos el integrando con $\frac{1}{\sqrt{x}}$ y notamos que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\tan^2(x)}{\sqrt{x}(1-\cos(x))}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan^2(x)}{1-\cos(x)} = 2 \neq 0.$$

Luego la integral converge por compración al límite con una integral tipo p con $p = \frac{1}{2} < 1$.

b) Mostraremos que dicha integral diverge. De hecho, si comparamos al límite con $g(x) = \frac{1}{x}$ se tiene que

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{(\ln(x))^{2026}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{(\ln(x))^{2026}}.$$

Esto nos da una indeterminación del estilo $\frac{\infty}{\infty}$. Si aplicamos la regla de L'Hopital, obtenemos lo siguiente

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{(\ln(x))^{2026}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2026(\ln(x))^{2025}\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2026(\ln(x))^{2025}}.$$

Así, aplicando 2024 veces más la regla de L'Hopital se puede ver que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{(\ln(x))^{2026}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2026!\ln(x)\frac{1}{x}} = \frac{1}{2026!}\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2026!\ln(x)} = \frac{1}{2026!}\lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

Dado que $\int_{2026}^{\infty} \frac{1}{x}dx$ diverge se sigue que la integral original también diverge.

□

Puntaje:

a) (3 pts)

- **C1a:** 0.5 pts: Identifica la integral impropia de segunda especie por la asíntota del integrando $f(x) = \frac{\tan^2(x)}{\sqrt{x}(1-\cos(x))}$.
- **C2a:** 0.5 pts: Escoge la función $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ para comparar al límite. (Cualquier otra opción que lleve al mismo resultado es válida)
- **C3a:** 1 pt: Calcula correctamente el límite $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$.
- **C4a:** 0.5 pts: Argumenta que la integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ es convergente pues es una integral tipo p con $p = \frac{1}{2} < 1$.
- **C5a**: 0.5 pts: Concluye a través de los dos puntos anteriores que $\int_0^1 f(x)dx$ también es convergente.

b) (3 pts)

- **C1b:** 0.2 pts: Identifica la integral impropia de primera notando que el integrando $f(x) = \frac{1}{\ln(x)^{2026}}$ es una función positiva en el intervalo de integración.
- **C2b:** 0.3 pts: Ocupa la ayuda y define $h(x) = \frac{1}{\ln(x)^3}$. Encuentra una función para comparar al límite, por ejemplo, $g(x) = \frac{1}{x}$. (Cualquier otra opción que lleve al mismo resultado es válida).
- **C3b:** 1 pt: Calcula correctamente el límite $\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{g(x)}$.
- **C4b:** 0.5 pts: Argumenta que la integral $\int_{2026}^{\infty} \frac{1}{x}dx$ diverge, usando el criterio de la integral p con $p = 1 \geq 1$.
- **C5b:** 0.5 pts: Concluye, a través de los dos puntos anteriores, que $\int_{2026}^{\infty} h(x)dx$ diverge.

- **C6b:** 0.3 pts: Argumenta que, usando reiteradas veces la regla de L'Hopital, que

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{g(x)} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

- **C7b:** 0.2 pts: Concluye por comparación al límite que $\int_{2026}^{\infty} \frac{1}{(\ln(x))^{2026}} dx$ diverge.

Problema 2

Definamos la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por

$$p_1 = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad p_{n+1} = \frac{p_n}{2+p_n}$$

(a) Determine si la sucesión es convergente o no. En caso de que sea convergente, determine el límite

$$\lim_{n\to+\infty} p_n.$$

(b) Determine si la serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n p_n$$

es convergente.

Solución.

(a) Probaremos que la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y monótona. Para ello, notemos que $p_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, notemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$0 < p_{n+1} = \frac{p_n}{2+p_n} \leq \frac{p_n}{p_n} = 1.$$

Luego la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. Además, se tiene que

$$p_{n+1} = \frac{p_n}{2+p_n} \leq \frac{1}{2}p_n < p_n.$$

Así la sucesión es decreciente.

Como $\{p_n\}$ es acotada y monótona, entonces converge. Llamemos $L = \lim_{n\to\infty} p_n$. Tomando el límite en la expresión que define la recursión se concluye que $L = \dfrac{L}{2+L} \implies L(1+L) = 0$. Como $p_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $L \neq -1$, y por tanto $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$

(b) Como $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ y como $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, se sigue por el criterio de la serie alternante que la serie es convergente.

□

Puntaje:

(a) 4.5 pts.

- **C1a:** 0.5 pts: Argumenta que $p_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **C2a:** 1 pts: Demuestra que $p_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (es válido si encuentra otra cota superior, debe demostrar que es correcta)

- **C3a:** 1 pt: Demuestra que la sucesión es decreciente. La prueba es directa una vez que se menciona que $p_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si usa inducción, otorgar 0.2 pts por caso base, 0.3 por hipótesis inductiva y 0.5 pts por el paso inductivo.
- **C4a:** 1 pt: Concluye que la sucesión es convergente por ser monótona y acotada.
- **C5a:** 0.5 pt: Usa la igualdad $\lim_{n\to\infty} p_{n+1} = \lim_{n\to\infty} p_n$ para encontrar el límite L. Obtiene $L = 0$ o $L = -1$ como posibles límites.
- **C6a:** 0.5 pt: Descarta el límite $L = -1$ argumentando que $p_n > 0$.

(b) 1.5 pts.

- **C1b:** 0.2 pts: Identifica que la serie es alternante pues $p_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **C2b:** 0.3 pts: Recuerda que la sucesión cumple con $p_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y que ésta es decreciente.
- **C3b:** 1 pt: Concluye por el criterio de la serie alternante que la serie converge.

Alternativamente, si demuestra que la serie es absolutamente convergente, dar 0.5 pt por usar adecuadamente el criterio de la razón, es decir, prueba que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Dar 0.5 pts por concluir correctamente la convergencia absoluta y 0.5 pts por argumentar que la convergencia absoluta implica la convergencia de la serie original.

Problema 3

Determine si las siguientes series son convergentes o no.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n}\right)^n$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \qquad \text{donde} \qquad x_{n+1}=\frac{2n^3+3}{n^3+1}\,x_n \quad \text{y} \quad x_1\neq 0.$

Solución.

(a) La serie es convergente. De hecho, utilizando el criterio de la raíz se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{3}{n}\right|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}=0<1,$$

luego converge.

(b) Por el criterio de la razón, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3}{n^3+1}=2>1,$$

luego la serie diverge.

□

Puntaje:

(a) 3 pts:

- **C1a:** 1 pt: Identifica que debe usar criterio de la raíz o el criterio de la razón.
- **C2a:** 1 pt: Calcula de manera correcta que $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{n^n}}=0$. Si usa criterio de la razón, debe argumentar bien el límite, pues aparece un límite que aproxima al número e.
- **C3a:** 1 pt: Concluye la convergencia de la serie.

(b) 3 pts:

- **C1b:** 1 pt: Identifica que debe usar criterio de la razón.
- **C2b:** 1 pt: Calcula de manera correcta que $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=2$.
- **C3b:** 1 pt: Concluye que la serie diverge.

Problema 4

Demuestre que

$$1 - \ln(5) + \frac{\ln^2(5)}{2!} - \frac{\ln^3(5)}{3!} + \cdots = \frac{1}{5}.$$

Solución.

Digamos $t = \ln(5)$. Entonces la serie a evaluar es:

$$S = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \cdots$$

Esta serie guarda relación con la serie de Maclaurin de la función exponencial. En efecto,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n = e^{-t}$$

Por lo tanto,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\ln(5))^n = e^{-\ln(5)}$$

Aplicando propiedades algebraicas:

$$S = e^{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} = \frac{1}{5}$$

□

Puntaje:

- **C1:** 0.5 pts por asociar $t = \ln(5)$.
- **C2:** 1 pto por escribir $S = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \cdots$.
- **C3:** 0.5 pts por identificar el patrón de signos alternados.
- **C4:** 0.5 pts por identificar el patrón factorial y de potencias $(\frac{t^n}{n!})$.
- **C5:** 0.5 pts por escribir correctamente la serie.
- **C6:** 0.5 pts por identificar que corresponde a la serie de Maclaurin de la función e^x
- **C7:** 0.5 pts Por sustituir $x = -t$.
- **C8:** 0.5 pts por asociar la serie, finalmente, a la función e^{-t}
- **C9:** 1 pts por asociar la serie a $e^{-\ln(5)}$
- **C10:** 0.5 pto por concluir, correctamente, que $S = \frac{1}{5}$

Problema 5

Utilice la serie de potencias para $\arctan(x)$ centrada en $x = 0$ para probar que

$$\pi = 2\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

(Ayuda: Recuerde que

$$\arctan(t) = \int_0^t \frac{1}{1+x^2}\,dx \quad \text{y que} \quad \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6})$$

Solución.

De la serie de potencias de $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ se sigue que

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, \quad \forall |x| < 1.$$

Luego, usando la ayuda se tiene que

$$\arctan(t) = \int_0^t \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}dx.$$

Intercambiando la suma con la integral se sigue que

$$\arctan(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^t x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big|_{x=0}^{x=t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1}.$$

Usando la ayuda y reemplazando la expresión anterior en $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ se sigue que

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}.$$

Multiplicando por 6 a ambos lados se concluye el resultado.

□

Puntaje

- **C1:** 1 pt: Expresa $\arctan(t)$ como serie de potencias. Puede indicarla de manera directa o deducirla a través de la ayuda.
- **C2:** 1 pt: Indica el radio de convergencia donde es válido que $\arctan(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$. Es decir, $|t| < 1$.
- **C3:** 0.5 pts: Reemplaza $\frac{1}{\sqrt{3}}$ en la serie de potencias.
- **C4:** 1.5 pts: Usa lo anterior para argumentar que

$$\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(\sqrt{3})^{2n+1}}$$

- **C5:** 1 pt: Simplifica la expresión $\frac{1}{\sqrt{3}}$ en $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(\sqrt{3})^{2n+1}}$.
- **C6:** 1 pt: Concluye el resultado final.