Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 – Cálculo 2
Segundo Semestre de 2025

Pauta Interrogación 1

Problema 1

(a) **(1.5pts)** Muestre que si f' es continua sobre $[0,\infty)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, entonces

$$\int_0^\infty f'(x)\mathrm{d}x = -f(0).$$

(b) **(2pts)** Para $s \in \mathbb{R}$, considere la función definida por

$$F(s) := \int_0^\infty e^{-sx}\mathrm{d}x.$$

Determine el dominio de F, es decir, $\{s \in \mathbb{R} \mid F(s) \in \mathbb{R}\}$.

(c) **(2.5pts)** Determine si

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-\cos(x)}\mathrm{d}x$$

converge o no.

Solución

(a) Por el teorema fundamental del cálculo, para todo $t > 0$ se tiene que

$$\int_0^t f'(x)\mathrm{d}x = f(t) - f(0).$$

Luego, usando que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, tenemos

$$\int_0^\infty f'(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_0^t f'(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0) = -f(0).$$

(b) Notemos primero que si $s = 0$, entonces $e^{-sx} = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que $F(0) = \int_0^\infty \mathrm{d}x = +\infty$. Por otro lado, para $s \neq 0$, tenemos

$$F(s) = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-sx}\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-sx}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=t} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{s}\left(1-e^{-st}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{s} & \text{si } s > 0 \\ +\infty & \text{si } s < 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, $\mathrm{Dom}(F) = \mathbb{R}_+$.

(c) La integral presentada es una integral impropia de tipo II, dado que la función $f(x) := \frac{1}{1-\cos(x)}$ posee una asíntota vertical en $x = 0$. Para analizar su comportamiento, utilizamos la función de comparación $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Dado que

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2},$$

por el criterio de comparación en el límite sabemos que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ tiene el mismo comportamiento que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\mathrm{d}x$. Finalmente, dado que $2 \geq 1$, sabemos por el "criterio p" que la última integral impropia diverge, por lo que la primera integral también diverge.

Problema 2

(a) Considere la sucesión definida mediante la recurrencia

$$p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_{n+1} = \frac{2p_n}{1+p_n} \text{ para } n \in \mathbb{N}.$$

Es fácil ver que $p_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual no debe demostrar.

- **(i) (1.5pts)** Muestre que $p_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **(ii) (1.5pts)** Muestre que $\{p_n\}$ es estrictamente creciente.
- **(iii) (1pt)** Deduzca que $\{p_n\}$ es convergente y calcule su límite.

(b) (2pts) Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ converge o no.

Solución

(a) **(i)** Argumentaremos por inducción. El caso base se tiene de forma trivial, dado que $p_1 = \frac{1}{2} < 1$. Supongamos que $p_n < 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Debemos mostrar que $p_{n+1} < 1$. Para ello, veamos que

$$p_{n+1} - 1 = \frac{2p_n}{1+p_n} - 1 = \frac{p_n - 1}{1+p_n} < 0,$$

donde en la última desigualdad usamos que $0 < p_n < 1$. Luego, $p_{n+1} < 1$. Por lo tanto, por inducción se tiene lo pedido.

(ii) Para mostrar que $\{p_n\}$ es estrictamente creciente, debemos mostrar que

$$p_n < p_{n+1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Tenemos

$$p_{n+1} - p_n = \frac{2p_n}{1+p_n} - p_n = \frac{p_n - p_n^2}{1+p_n} = \frac{p_n(1-p_n)}{1+p_n} > 0,$$

donde en la última desigualdad utilizamos que $0 < p_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, $\{p_n\}$ es estrictamente creciente.

(iii) Dado que la sucesión $\{p_n\}$ es monótona y acotada, deducimos que converge, cuando $n \to \infty$, a un real $L \in [0,1]$. Tomando el límite $n \to \infty$ en la relación $p_{n+1} = \frac{2p_n}{1+p_n}$, encontramos que

$$L = \frac{2L}{1+L} \implies L + L^2 = 2L \implies L(L-1) = 0 \implies L = 0 \text{ ó } L = 1.$$

Como la sucesión es estrictamente creciente y $p_1 = \frac{1}{2}$, necesariamente $L = 1$.

(b) Utilizaremos el criterio de convergencia integral. Para ello, consideramos la función $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$, la cual es estrictamente positiva para todo $x \geq 2$. Además,

$$f'(x) = -\frac{(\ln x)^2 + 2\ln x}{x^2(\ln x)^4} < 0 \quad \text{para todo } x \geq 2,$$

por lo que f es decreciente. Luego,

$$\int_2^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_2^t f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_{x=2}^{x=t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln t} = \frac{1}{\ln 2}.$$

Por el criterio de convergencia integral, deducimos que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ converge.

Problema 3

(a) **(2pts)** Calcule, si existe, $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)^n$.

(b) **(2pts)** Muestre que si $a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.

(c) **(2pts)** Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ converge o no.

Solución

(a) Sabemos que $\text{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \in (0,1)$. Luego, la serie pedida es una geométrica convergente. Calculemos dicha serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}.$$

(b) Utilizaremos el criterio de comparación en el límite para deducir que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ es convergente a partir de la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Notar que ambas series corresponden a series de números estrictamente positivos. Dado que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, necesariamente $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. De esto, deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Por el criterio de comparación en el límite, dado que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ también converge.

(c) Notemos que, dado que la función coseno es continua,

$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \cos\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\right) = \cos(0) = 1.$$

De lo anterior, deducimos que $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ no existe. Esto permite concluir inmediatamente que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ diverge.

Asignación de puntajes

Problema 1

- **(a)** **(i)** **(0.7 pts)** Utiliza correctamente el teorema fundamental del cálculo.
  - **(ii)** **(0.3 pts)** Escribe correctamente la definición con límite de la integral impropia analizada.
  - **(iii)** **(0.5 pts)** Concluye el resultado utilizando la hipótesis $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.
- **(b)** **(i)** **(0.3 pts)** Analiza correctamente el caso $s = 0$.
  - **(ii)** **(0.3 pts)** Escribe correctamente la definición con límite de la integral impropia analizada para $s \neq 0$.
  - **(iii)** **(0.5 pts)** Calcula correctamente $\int_0^t e^{-sx}\mathrm{d}x$ para $s \neq 0$.
  - **(iv)** **(0.3 pts)** Deduce correctamente que $F(s) \in \mathbb{R}$ si $s > 0$.
  - **(v)** **(0.3 pts)** Deduce correctamente que $F(s) = +\infty$ si $s < 0$.
  - **(vi)** **(0.3 pts)** Concluye que $\mathrm{Dom}(F) = \mathbb{R}^+$.
- **(c)** **(i)** **(0.3 pts)** Identifica que el integrando $f(x) = \frac{1}{1-\cos(x)}$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$.
  - **(ii)** **(0.3 pts)** Elige la función de comparación $g(x) = \frac{1}{x^2}$.
  - **(iii)** **(1 pt)** Calcula correctamente $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)}$.
  - **(iv)** **(0.4 pts)** Indica que dado que $2 \geq 1$ (aludiendo al "criterio p"), $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\mathrm{d}x$ diverge.
  - **(v)** **(0.5 pts)** Concluye correctamente mediante el criterio de comparación en el límite que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ diverge.

Problema 2

- **(a)** **(i)** **(1)** **(0.2 pts)** Indica que se cumple el caso base de inducción.
  - **(2)** **(0.3 pts)** Establece correctamente la hipótesis y tesis inductiva.
  - **(3)** **(0.6 pts)** Calcula correctamente la diferencia $p_{n+1} - 1$.
  - **(4)** **(0.4 pts)** Deduce a partir de $p_n \in (0, 1)$ que $p_{n+1} - 1 < 0$.

(ii) **(1)** **(1 pt)** Calcula correctamente la diferencia $p_{n+1} - p_n$.

(2) **(0.5 pts)** Utiliza correctamente la parte anterior (es decir, $p_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$) y que $p_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ para concluir que $p_{n+1} - p_n > 0$.

(iii) **(1)** **(0.3 pts)** Deduce a partir de las partes anteriores que $\{p_n\}$ converge a un real L.

(2) **(0.4 pts)** Obtiene la relación $L(L-1) = 0$.

(3) **(0.3 pts)** Deduce correctamente que $L = 1$.

(b) **(i)** **(0.3 pts)** Elige la función de comparación $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ e indica que es estrictamente positiva para todo $x \geq 2$.

(ii) **(0.7 pts)** Demuestra correctamente que la función $f(x)$ es decreciente para todo $x \geq 2$.

(iii) **(0.6 pts)** Muestra correctamente que $\int_2^\infty f(x)\mathrm{d}x$ converge.

(iv) **(0.4 pts)** Concluye correctamente mediante el criterio de convergencia integral que la serie analizada es convergente.

Problema 3

(a) **(i)** **(0.5 pts)** Identifica que la serie analizada es una serie geométrica, dado que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \in (0,1)$.

(ii) **(0.5 pts)** Deduce que la serie analizada es convergente.

(iii) **(1 pt)** Calcula correctamente el valor de la serie.

(b) **(i)** **(0.2 pts)** Elige la serie de a_n para utilizar el criterio de comparación en el límite.

(ii) **(0.2 pts)** Indica que ambas series (la analizada y la elegida) corresponden a series de números estrictamente positivos.

(iii) **(0.7 pts)** Deduce a partir de la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(iv) **(0.5 pts)** Calcula correctamente el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{a_n}$.

(v) **(0.4 pts)** Concluye correctamente mediante el criterio de comparación en el límite que la serie analizada es convergente.

(c) **(i)** **(0.8 pts)** Calcula correctamente $\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

(ii) **(0.8 pts)** Deduce correctamente a partir de lo anterior que $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ no existe.

(iii) **(0.4 pts)** Deduce correctamente de lo anterior que la serie analizada diverge.