Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

# Interrogación 2

9 de Junio de 2026

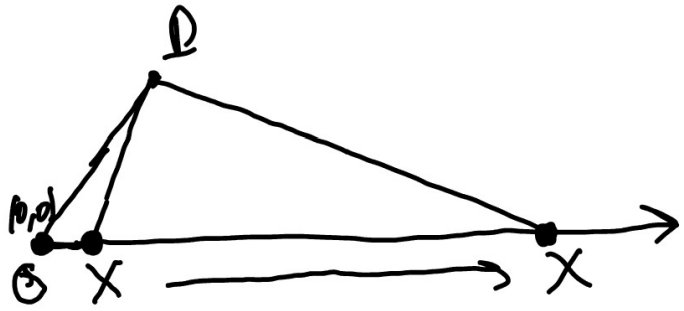
**Duración:** 2:30 hrs. **Puntuación:** Cada pregunta vale 6 puntos.
Recuerde que todas las respuestas deben estar justificadas.

**Pregunta 1.** Sean $P, Q \in \mathbb{R}^2$. Define $P \sim Q$ si existe $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ tal que $P$ y $Q$ tienen distancia $3x$ del punto $(x, 0)$. Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia. *Recuerde que para cualquier par de puntos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ en $\mathbb{R}^2$ la distancia entre ambos esta dada por $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.*

*Solución.* La relación es simétrica ya que el orden de $P$ y $Q$ no tiene ningúna importancia en la definición. Nos falta ver que la relación es refleja y transitiva.

- Mostramos que $\sim$ es refleja. Es decir, para todo punto $P \in \mathbb{R}$, mostramos que $P \sim P$. Para eso, según la definición, hay que mostrar que existe $x \geq 0$ tal que $P$ tiene distancia $3x$ del punto $(x, 0)$.

  Si $P = (0, 0)$, nos sirve $x = 0$. Ahora, asume que $P \neq (0, 0)$. Colocamos el punto $X$ en el origen $O$ y comencemos a desplazar ese punto hacia la derecha a lo largo del eje $x$. Hay mostrar que en algún momenta la relación $|PX|/|XO|$ tomará el valor 3. Cuando $X$ todavía está en $O$, esta relación toma valor $+\infty$. Ahora, nota que cuando $X$ aleja más y más de $O$, la relación $|PX|/|XO|$ converge a 1. En particular, será un momento cuando esa relación es a lo más, digamos, 1.1. Efectivamente, ya que $|PX|$ está acotado por $|XO| + |PO|$, eso sucederá cuando $X$ se alejará de $O$ 10 veces más que $P$.



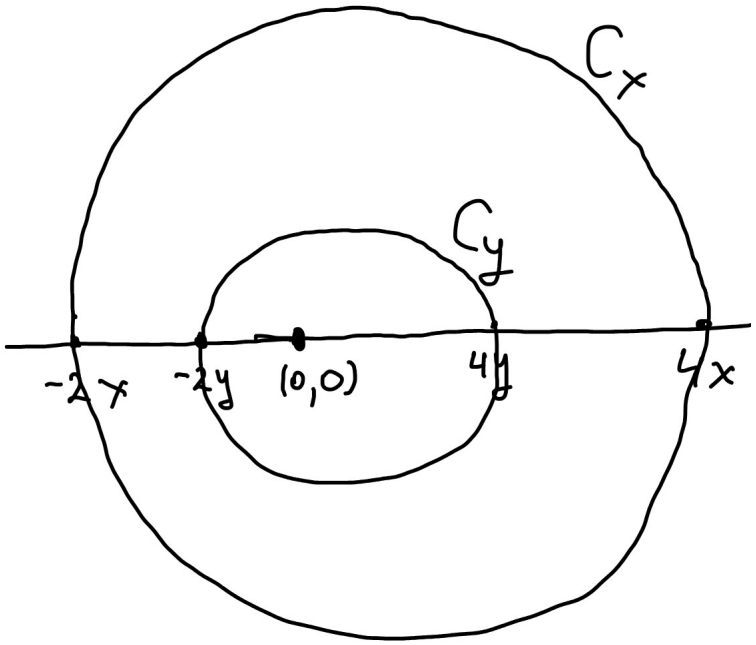

  Como el punto se mueve de manera continua, la relación tomará todos los valores intermedios, incluido 3.

- Ahora mostramos que $\sim$ es transitiva. Sean $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$ tres puntos tales que $P \sim Q, Q \sim R$. Hay que mostrar que $P \sim R$.

  Ya que $P \sim Q$, existe $x \geq 0$ tal que $P, Q$ ambos tienen distancia $3x$ del punto $x$. Así mismo, ya que $Q \sim R$, existe $y \geq 0$ tal que $Q, R$ ambos tienen distancia $3y$ del punto $(y, 0)$.

  Basta ver que $x = y$. Asume por contradicción que $x \neq y$. Sin pérdida de la generalidad, $x > y$. Puntos $P, Q$ ambos están en la circunferencia $C_x$ con centro en $(x, 0)$ y con radius $3x$. Nota que $C_x$

está construida tomando el segmento $[-2x, 4x]$ como el diámetro. Así mismo, $Q, R$ pertenecen a la circunferencia $C_y$ que que tiene el segmento $[-2y, 4y]$ como diámetro. Sin embargo, un diámetro es un subsegmento propio de otro, así que las circunferencias $C_x$ y $C_y$ son disjuntas. Eso nos da una contradicción con el hecho que $Q$ pertenece a ambas circunferencias.




□

**Pregunta 2.** Sean $X, Y, A, B$ conjuntos finitos tales que $A \subseteq B \subseteq Y$. ¿Puede suceder que el número de funciones $f\colon X \to Y$ tales que $f(X) = A$ sea mayor que el número de funciones $f\colon X \to Y$ tales que $f(X) = B$?

Si $X, Y, A, B$ así existen, de un ejemplo. Si no, demuestre porque.

*Solución.* Sí, puede. Define $X = \{1\}$, $Y = B = \{1, 2\}$, $A = \{1\}$. Hay 1 función $f\colon \{1\} \to \{1, 2\}$ tal que $f(\{1\}) = \{1\}$ (la que mapea 1 a 1). Mientras tanto, no hay funciones $f$ tales que $f(\{1\}) = \{1, 2\}$ (una función no puede tomar dos distintos valores en 1).

□

**Pregunta 3.** Recuerde que una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es

- **convexa** si $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}, t \in [0,1]$;
- **cóncava** si $f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}, t \in [0,1]$.

Sea $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no decreciente y convexa.
a) Demuestre que si $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función convexa, entonces $\alpha \circ \beta$ es convexa.
b) Demuestre que si $\alpha$ es biyectiva, entonces su función inversa $\alpha^{-1}$ es cóncava.

*Solución.* a) Hay que mostrar

$$\alpha(\beta(tx + (1-t)y)) \leq t\alpha(\beta(x)) + (1-t)\alpha(\beta(y)). \tag{1}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}, t \in [0,1]$. Ya que $\beta$ es convexa, tenemos:

$$\beta(tx + (1-t)y) \leq t\beta(x) + (1-t)\beta(y).$$

Luego, ya que $\alpha$ es no decreciente, la desigualdad anterior se cumple cuando aplicamos $\alpha$ a ambos partes:

$$\alpha\big(\beta(tx + (1-t)y)\big) \leq \alpha\big(t\beta(x) + (1-t)\beta(y)\big).$$

Nos falta notar que por el hecho que $\alpha$ es convexa, tenemos (usando la definición de una función convexa para $x' = \beta(x), y' = \beta(y)$):

$$\alpha\big(t\beta(x) + (1-t)\beta(y)\big) \leq t\alpha\big(\beta(x)\big) + (1-t)\alpha\big(\beta(y)\big)$$

lo que junto con la desigualdad anterior nos da (2).

b) Tenemos que mostrar

$$\alpha^{-1}(tx + (1-t)y) \geq t\alpha^{-1}(x) + (1-t)\alpha^{-1}(y) \tag{2}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}, t \in [0,1]$. Asume por contradicción que

$$\alpha^{-1}(tx + (1-t)y) < t\alpha^{-1}(x) + (1-t)\alpha^{-1}(y).$$

Ya que $\alpha$ es no decreciente, el valor de $\alpha$ en el lado izquierdo es menor o igual al valor de $\alpha$ en el lado derecho. Más encima, ya que $\alpha$ es biyectiva, no podemos tener la igualdad. Por lo tanto:

$$\alpha \circ \alpha^{-1}(tx + (1-t)y) < \alpha\Big(t\alpha^{-1}(x) + (1-t)\alpha^{-1}(y)\Big).$$

El lado izquierdo se convierte a $tx + (1-t)y$. Así uno obtiene:

$$tx + (1-t)y < \alpha\Big(t\alpha^{-1}(x) + (1-t)\alpha^{-1}(y)\Big).$$

Por el otro lado, ya que $\alpha$ es convexa, el lado derecho puede ser acotado así:

$$\alpha\Big(t\alpha^{-1}(x) + (1-t)\alpha^{-1}(y)\Big) \leq t\alpha\Big(\alpha^{-1}(x)\Big) + (1-t)\alpha\Big(\alpha^{-1}(y)\Big) = tx + (1-t)y,$$

y eso nos da una contradicción.

□

**Pregunta 4.** Sea $A$ un conjunto finito. Demuestre que todo orden parcial sobre $A$ es un subconjunto de un orden total sobre $A$.

*Solución 1.* En otras palabras, para todo orden parcial $\preceq$ sobre un conjunto finito $A$ hay que construir un orden total $\leq$ sobre $A$ tal que $x \preceq y \implies x \leq y$ para todo $x, y \in A$.

Vamos a definir ese orden total, colocando los elementos de $A$ en una fila. Más precisamente, vamos a tener $x \leq y$ si $x$ está a la izquierda de $y$, o coincide con $y$. Hay que asegurarnos que si $x \preceq y$, entonces $x$ no puede estar a la derecha de $y$.

Para todo $a \in A$, definimos $f(a)$ como la cantidad de los elementos $x \in A$ tales que $x \preceq a$. Ya que $A$ es finito, esa función está bien definida. Nota que $x \preceq y, x \neq y$ implica que $f(x) < f(y)$. Efectivamente, todo elemento que es menor o igual a $x$ en $\preceq$ también es menor o igal a $y$ por transitividad. Adicionalmente, $y$ es menor o igual a $y$, pero $y \not\preceq x$ ya que $\preceq$ es antisimétrica. Por lo tanto, la cantidad de los elementos menor o igual a $y$ es estrictamente mayor que la cantidad similar para $x$.

Eso demuestre que basta colocar los elementos de $A$ en una fila según el valor de $f$, es decir, mientras más grande es ese valor, más a la derecha uno se pone el elemento (ordenando los elementos con el mismo valor en la manera arbitraria). Uno no puede colocar $x$ después de $y$ si $x \preceq y$ y $x$ es distinto de $y$ ya que $f(x) < f(y)$.

□

*Solución 2.* El lema siguiente demuestre que uno puede agregar pares al nuestro orden parcial hasta que no es conexo. Ya que $A$ es finito, eso proceso terminará en algún momento en un orden total que contiene el orden parcial inicial como un subconjunto.

**Lema 1.** Sea $R$ un orden parcial sobre un conjunto $A$. Luego, sean $a, b \in A$ tales que $(a, b) \notin R, (b, a) \notin R$. Entonces, existe un orden parcial $R'$ sobre $A$ tal que

$$R \cup \{(a, b)\} \subseteq R'.$$

*Demostración.* Intuitivamente, queremos agregar la desigualdad $a \preceq b$ al nuestro orden parcial. Al hacer eso, por transitividad tendremos que agregar todas las pares $(x, y)$ tal que $x$ es menor o igual a $a$ y $b$ es menor o igual a $y$.

Entonces, sean $x, y \in A$. Define $xR'y$ si $xRy$ o si $xRa$ y $bRy$. Demostramos que $R'$ satisface todas las condiciones del lema.

Tenemos que $R \subseteq R'$ por definición. Luego, $aR'b$ ya que $aRa, bRb$. Por lo tanto, $R \cup \{(a, b)\} \subseteq R'$.

Ahora mostramos que $R'$ es un orden parcial. Partimos notando que $R'$ es refleja ya que $R$ es refleja y $R \subseteq R'$.

Luego, mostramos que $R'$ es antisimétrica. Por contradicción, asuma que $xR'y$ y $yR'x$ para $x, y \in A$, $x \neq y$. Ya que $R$ es antisimétrica, tenemos $\neg xRy$ o $\neg yRx$. Sin pérdida de generalidad, $\neg xRy$. Por definición, la única manera para que $xR'y$ sea verdad es si $xRa$ y $bRy$. Entonces, no puede ser $yRx$, porque $bRy, yRx, xRa \implies bRa$. Luego, no puede ser $yRa$ ya que $bRy, yRa \implies bRa$. Con eso, concluimos que $\neg yR'x$, una contradicción.

Finalmente, mostramos que $R'$ es transitiva. Sean $x, y, z \in A$ tales que $xR'y, yR'z$. Demostramos que $xR'z$.

Al principio, asume que $xR'y$ se cumple porque $xRy$. Si $yR'z$ también se cumple por $yRz$, entonces, tenemos $xRz \implies xR'z$. Luego, si $yR'z$ se cumple por $yRa, bRz$, nota que $xRy, yRa \implies xRa$. En su turno, $xRa$ junto con $bRz$ nos da $xR'z$.

Finalmente, asume que $xR'y$ se cumple por $xRa, bRy$. Nota que no puede ser $yRa$ porque $bRy, yRa \implies bRa$. Entonces, la única manera que $yR'z$ sea verdad es por $yRz$. En ese caso, $bRy, yRz \implies bRz$. En su turno, $xRa, bRz$ implica $xR'z$.

□

□

# Casos Descuento - Interrogación 2

Pregunta 1

- 1pto por indicar simetria correctamente
- 2pts por demostrar reflexividad correctamente
- 3pts por demostrar transitividad correctamente
- Reflexividad: Demuestra con distancia entre P y P (=0). La relacion no habla de las distancias entre P y Q, sino la distancia entre estos y el punto (x,0). -2pts
- Enuncia solo la definicion de una propiedad (refleja, simetrica, transitiva) sin analisis sobre la relacion del enunciado, simplemente afirmando que se cumple. 0pts
- Transitividad: Demuestra la existencia unica de x_1 y x_2, sin embargo no demuestra que son iguales. -2.5pts
- Refleja: No demuestra la existencia de x >= 0 para todos los puntos de R^2. -2pts
- Transitividad: Demuestra la existencia e igualdad de x_1 y x_2, pero no demuestra que sean >= 0. -0.5pts
- Demostrar solo un caso en particular (Ej: Con x = 2, Con P y Q talque si P se relaciona con Q y Q se relaciona con P entonces se cumple transitividad (P,P)). 0pts
- Reflexividad: No demuestra que x es mayor o igual a 0. -1pts
- Existen errores de notación pero que no afectan particularmente la demostración. -0.5pts
- Refleja: Busca demostrarla con ecuación cuadrática, pero no la desarrolla correctamente (cometiendo errores algebraicos importantes). -1.5pts
- Refleja: afirma que se demuestra para x>0 (olvidando el 0). -0.5pts
- Simetría: demuestra correctamente simetría, pero agrega una demostración irrelevante con errores. -0.5pts

Pregunta 2

- 0 ptos si indica que no puede suceder, es decir, si demuestra lo contrario.
- 0 ptos si no justifica la afirmación.
- 0.5-1 ptos si plantean el contraejemplo, desarrollan justificadamente una demostración y concluyen erróneamente.
- Al menos 1 pto si concluye correctamente (cuidando justificar). Puntaje adicional parcial de acuerdo con la calidad del argumento provisto dado el contraejemplo.
- 3-4 ptos si no da un contrajemplo, pero concluye y argumenta correctamente (dependiendo del nivel de argumentación).
-

Pregunta 3

Parte a:

- No enuncia la desigualdad que hay que demostrar. -1

- No justifica las desigualdades intermedias usando que alpha es no decreciente y convexa y beta es convexa. -1 cada desigualdad

Parte b:

- No enuncia la desigualdad que hay que demostrar. -1
- No demuestra que la función inversa es no-decreciente. -1

Pregunta 4

- +1pto por identificar correctamente como “construir” el orden total desde el orden parcial.
- +1pto por identificar correctamente las propiedades que se deben argumentar.
- - 1pto por no demostrar correctamente como el orden construido cumple con alguna propiedad.
-