

Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Interrogación 1

9 de Abril de 2026

Duración: 2:30 hrs. **Puntuación:** Cada pregunta vale 6 puntos.
Recuerde que todas las respuestas deben estar justificadas.

Pregunta 1. Demuestre que

$$\Big\{(x_0 \vee x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \to (x_5 \wedge x_6 \wedge x_7 \wedge x_8 \wedge x_9)\Big\} \models (\neg x_2) \vee x_8.$$

Solución. Por contradicción asumimos que no es una consecuencia lógica. Entonces, existe una valuación de las variables tal que

$$(x_0 \vee x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \to (x_5 \wedge x_6 \wedge x_7 \wedge x_8 \wedge x_9) = 1, \qquad (\neg x_2) \vee x_8 = 0.$$

De la segunda igualdad sale que $x_2 = 1, x_8 = 0$. Luego, para nuestra valuación obtenemos:

$$\begin{aligned}&(x_0 \vee x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \to (x_5 \wedge x_6 \wedge x_7 \wedge x_8 \wedge x_9)\\ &= (x_0 \vee x_1 \vee 1 \vee x_3 \vee x_4) \to (x_5 \wedge x_6 \wedge x_7 \wedge 0 \wedge x_9) = 1 \to 0 = 0.\end{aligned}$$

Eso nos da una contradicción. □

Pregunta 2. Considere el conectivo ternario δ dado por la siguiente tabla de verdad:

p	q	r	$\delta(p,q,r)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

a) Escriba este conectivo en CNF y DNF. (3 ptos.)

b) Demuestre que el conjunto $\{\delta\}$ es funcionalmente completo. (3 ptos.)
Hint: Recuerde que el conjunto $\{NOR\}$, con $NOR(p,q) = \neg(p \vee q)$ es funcionalmente completo.

Solución. a) El conectivo devuelve 1 para 3 valuaciones $(p,q,r) = (0,0,0), (1,0,1), (1,1,0)$ que a través del algoritmo estándar nos da la DNF para δ:

$$\delta(p,q,r) = (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r).$$

Así mismo, obtenemos una DNF para $\neg\delta$:

$$\neg\delta(p,q,r) = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r).$$

Luego, a través de la ley de Morgan, llegamos a una CNF para δ:

$$\delta(p,q,r) = (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r).$$

b) Ya que $\{NOR\}$ es funcionalmente completo, basta probar que NOR se exprese a través de δ. Notemos que δ se convierte en NOR al identificar las variables q, r. Efectivamente, δ toma valor 1 en $p = 0, q = r = 0$, y toma valor 0 en $(p = 0, q = r = 1)$, $(p = 1, q = r = 0)$ y $(p = 1, q = r = 1)$. Por lo tanto:

$$NOR(p,q) = \delta(p,q,q).$$

Recordamos (aunque lo siguente no es necesario para la solución completa) que a través $\neg, \vee$ se exprese a través de NOR así:

$$\neg p = NOR(p,p), \qquad p \vee q = \neg\neg(p \vee r) = NOR(NOR(p,q), NOR(p,q)).$$

□

Pregunta 3. Sobre $\mathbb{N}$, considere los predicados:

$$A(x,y) = \begin{cases} 1 & y = 2^x, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \qquad B(x,y) = \begin{cases} 1 & y = 4^x, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Usando sólo los predicados A, B, igualdad y conectivos/cuantificadores lógicos, escriba una formula $\phi(x)$ equivalente a "x es par".

Solución. Un número natural x es par si y sólo si 2^x es una potencia de 4, o en otras palabras, si existen $y, x_1 \in \mathbb{N}$ tal que $y = 2^x = 4^{x_1}$. Lo último se escribe así:

$$\phi(x) = \exists y \exists x_1 (A(x,y) \wedge B(x_1,y)).$$

□

Pregunta 4. Demuestre que la siguiente oración es una tautología:

$$[\forall x \forall y \forall z (A(x,y) \vee A(y,z) \vee A(z,x))] \to \big[\forall x \forall y \big(A(x,y) \vee A(y,x) \vee [A(x,x) \wedge A(y,y)]\big)\big]$$

Solución. Sea $D \neq \varnothing$ cualquier dominio y $A(x, y)$ cualquier predicado binario sobre D. Tenemos que mostrar que la oración toma el valor "verdad" en ese dominio y para esa interpretación de A.
Por contradicción, asumimos que la oración toma valor "falso". En ese caso, el antecedente de la oración es verdad y el consecuente es falso. Ya que el consecuente es falso, existen $x_0, y_0 \in D$ tal que $A(x_0, y_0) = 0, A(y_0, x_0) = 0$ y $A(x_0, x_0) \wedge A(y_0, y_0) = 0$. Luego, tenemos $A(x_0, x_0) = 0$ o $A(y_0, y_0) = 0$.
En el caso $A(x_0, x_0) = 0$, llegamos una contradicción porque para $x = x_0, y = y_0, z = x_0$ tenemos:

$$A(x, y) \vee A(y, z) \vee A(z, x) = A(x_0, y_0) \vee A(y_0, x_0) \vee A(x_0, x_0) = 0$$

así que el antecedente debería ser falso.
Así mismo, en el caso $A(y_0, y_0) = 0$, la contradicción se obtiene notando que para $x = y_0, y = x_0, z = y_0$:

$$A(x, y) \vee A(y, z) \vee A(z, x) = A(y_0, x_0) \vee A(x_0, y_0) \vee A(y_0, y_0) = 0$$

así que igual el antecedente debería ser falso.

□

Casos Descuentos – I1

Pregunta 1:

- Pongan acá el caso de su pregunta
- Criterio de descuento (-4 pts): Solo se demuestra un caso donde la consecuencia lógica se cumple.
- Criterio de descuento (-2 pts): Solo se demuestra un parcial de los casos de la consecuencia lógica.
- Criterio de descuento (-3 pts): Plantea ciertas conclusiones, pero llega a otras erroneas.
- Criterio de descuento (-2 pts): Plantea la idea de contradicción, pero la restricción la comenta sobre x2 y no x8
- Criterio de descuento (-2 pts): Falta mayor demostración, aun cuando la conclusión es correcta desde un punto de vista lógico.
- Criterio de descuento (-3 pts): Resolución lógica correcta pero no hay conclusión.
- Criterio de descuento (-2 pts): No se muestra desarrollo matemático.

Pregunta 2:

- Criterio de descuento (-1.5 pts): En la demostración de funcionalmente completo, falta demostrar alguna función ($\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$).
- Criterio de descuento (-2.5 pts): El estudiante identifica que para demostrar funcionalmente completo se debe mostrar que se puede escribir $\neg$ y $\vee$, $\wedge$ o $\rightarrow$.
- Criterio de descuento (-1.5 pts): Presenta solo una de las dos fórmulas, CNF o DNF. O alguna está incorrecta.
- Criterio de descuento (-0.5 pts): CNF o DNF correctos, pero con los símbolos de disyunción y conjunción cambiados.
- Criterio de descuento (-0.2 pts): CNF o DNF presenta un error mínimo, por ejemplo, una cláusula mala porque un literal está o no negado.
- Criterio de descuento (-0.5 pts): DNF con uno de los términos incorrecto, pero los otros dos correctos.
- Criterio de descuento (-1 pts): Encuentra una fórmula incorrecta para NOR a partir de δ, pero los pasos intermedios de la demostración son correctos.
- Criterio de descuento (-3 pts): El estudiante no demuestra de forma válida que δ es funcionalmente completo.
- Criterio de descuento (-0.5 pts): Llega a una conclusión correcta de porqué es funcionalmente completo, pero la demostración está incompleta, o no está bien justificado o verificado lo que se afirma.

Pregunta 3:

- Criterio de descuento (-3 pts): Se identifica correctamente la relación matemática que se utiliza para resolver el problema, pero se define una función completamente incorrecta.
- Criterio de descuento (-4 pts): Se entrega solo la fórmula como respuesta y este tiene un error menor.
- Criterio de descuento (-2 pts): La idea matemática de fondo está bien, pero no se explica (solo ponen la fórmula), y tiene errores al cuantificar las variables.
- Criterio de descuento (-1 pts): Se identifica correctamente la relación matemática que se utiliza para resolver el problema, pero tiene errores al cuantificar las variables.
- Criterio de descuento (-1 pts): Se identifica correctamente la relación matemática que se utiliza para resolver el problema, pero tiene algún error menor al definir la fórmula.
- Criterio de descuento (-5 pts): Cuantifica correctamente las variables, pero las relaciona incorrectamente. No identifica la relación matemática para resolver el problema, y no llega a una fórmula correcta.
- Criterio de descuento (-5 pts): Va por muy buen camino identificando la relación matemática necesaria, pero no lo termina y no escribe ninguna fórmula.
- Criterio de descuento (-5 pts): No logra identificar la relación matemática necesaria y no llega a una fórmula parcialmente correcta. Logra aislar correctamente el caso base (x=0).

Pregunta 4:

- Criterio de descuento (-1.5 pts): El estudiante reconoce correctamente la estrategia de contradicción y demuestra cómo la asignación de algunos elementos específicos en algunos casos lleva a una contradicción en una interpretación arbitraria, sin embargo, le faltan casos o solo argumenta con una de las asignaciones quedando la demostración incompleta.
- Criterio de descuento (-3 pts): El estudiante omite la instanciación formal. Aunque identifica correctamente la estrategia de contradicción, no demuestra cómo la asignación de elementos específicos y su combinación vinculan ambos lados de la implicación, el desarrollo permanece como una afirmación narrativa sin validez demostrativa (intenta demostrar mediante $\neg A \vee B$)
- Criterio de descuento (-4.5 pts): El estudiante intenta demostrar la tautología mediante una interpretación específica, demostrando que es satisfactible, pero no que es una tautología (intenta demostrar mediante $\neg A \vee B$)
- Criterio de descuento (-4.5 pts): El estudiante solo reconoce la estrategia de contradicción y que el caso importante es 1->0, pero no concluye nada ni desarrolla más para intentar argumentar por qué eso no puede ocurrir.

- Criterio de descuento (-6.0 pts): El estudiante demuestra que la oración no es una tautología mediante un contraejemplo basado en una interpretación específica.
- Criterio de descuento (-6.0 pts): El estudiante reformula el enunciado en otros términos sin demostración
- Criterio de descuento (-6.0 pts): El estudiante no identifica el caso de contradicción 1->0 ni tampoco desarrolla ni argumenta la tautología.