Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Examen

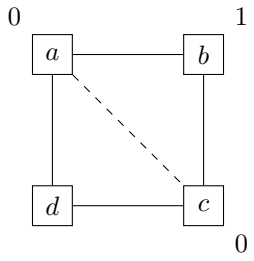
1 de Julio de 2026

Duración: 2:30 hrs. **Puntuación:** Cada pregunta vale 6 puntos.
Recuerde que todas las respuestas deben estar justificadas.

Pregunta 1. Determine si la siguiente DNF es una tautología.

$$\Big(a \wedge b\Big) \vee \Big(b \wedge c\Big) \vee \Big(c \wedge d\Big) \vee \Big(d \wedge a\Big) \vee \Big((\neg a) \wedge (\neg c)\Big) \vee \Big((\neg b) \wedge (\neg d)\Big)$$

Solución. Sí, es una tautología. Coloque los valores de las variables en los vértices de un cuadrado. La fórmula toma el valor 1 si y sólo si hay por lo menos un lado con dos 1s o una diagonal con dos 0s.
Asume por contradicción que existe una valuación de las variables tal que la DNF tomara el valor 1. Hay por lo menos un vértice con el valor 1 (efectivamente, en el caso contrario, ambas diagonales tendrían dos 0s). Entonces, dos vértices adyacentes tienen que tener 0. Pero estos vértices forman una diagonal con dos 0s, una contradicción.



□

Pregunta 2. Diremos que una secuencia de números naturales S es auto-divisible si:

1. S **no tiene** elementos repetidos.
2. La suma de los elementos en S es divisible por cada uno de ellos.

Por ejemplo, la secuencia $S = 1, 2, 3$ es una secuencia auto-divisible de largo 3:

$$1, 2, 3 \longrightarrow 1|6,\ 2|6,\ 3|6.$$

Demuestre que para todo número natural $n \geq 3$, existe al menos una secuencia de números naturales auto-divisible de largo n.

Solución. Demostramos por inducción sobre n (más precisamente, mostramos que basta utilizar los números enteros positivos, sin utilizar 0). Para la base, $n = 3$, uno puede utilizar el ejemplo del enunciado – la secuencia $1, 2, 3$. Ahora, asume que nos dan una secuencia auto-divisible $S = a_1, \ldots, a_n$ del largo n. Construimos una secuencia auto-divisible de largo $n + 1$. Agregamos la suma de todos los elementos a la secuencia:

$$S' = a_1, \ldots, a_n, a_1 + \ldots + a_n.$$

Mostramos que S' es auto-divisible. La suma de los números positivos es más grande que cada de estos números, así que todos los elementos de S' todavía son distintos. Por el otro lado, la suma de los elementos de S' es $2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$, es decir, dos veces más que en S. Por lo tanto, esta suma todavía es divisible por todo elemento de S, y asimismo por $a_1 + \ldots + a_n$. □

Pregunta 3.
a) Sean R_1 y R_2 relaciones de equivalencia sobre un conjunto A. Demuestre que $R_1 \cap R_2$ es una relación de equivalencia sobre A.
b) Sea A el conjunto de las casillas del tablero 8×8 de ajedrez estandarte. Luego, sean R_1 y R_2 los siguientes relaciones de equivalencia sobre A:

$$aR_1b \iff a, b \text{ están en la misma fila,} \qquad aR_2b \iff a, b \text{ tienen el mismo color".}$$

Encuentre el número de clases de equivalencia de $R_1 \cap R_2$.

Solución. a) $R_1 \cap R_2$ es refleja porque todo par $(a, a) \in A \times A$ pertenece y R_1, y R_2, y por lo tanto a $R_1 \cap R_2$. Asimismo, si $(a, b) \in R_1 \cap R_2$, entonces $(b, a) \in R_1, (b, a) \in R_2$ ya que R_1, R_2 son simétricas, y por lo tanto a $R_1 \cap R_2$. Concluimos que $R_1 \cap R_2$ es simétrica. Finalmente, si $(a, b), (b, c) \in R_1 \cap R_2$, entonces, ambos pares están y en R_1 y en R_2, así que (a, c) está y en R_1 y en R_2 ya que R_1, R_2 son transitivas. Concluimos que $(a, c) \in R_1 \cap R_2$ y que $R_1 \cap R_2$ es transitiva.

b) Dos casillas son equivalentes en $R_1 \cap R_2$ si están en la misma fila y tienen el mismo color. Cada fila del tablero de ajedrez tiene 4 casillas blancas y 4 casillas negras. Por lo tanto, cada clase de equivalencia consiste de 4 casillas monocromaticas de una fila. Concluimos que hay $64/4 = 16$ clases de equivalencia en $R_1 \cap R_2$.

□

Pregunta 4. Demuestre que $\mathbb{R} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{R}$.

Demostración. Por un lado $\mathbb{R} \preceq \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ porque la función

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{N}, \qquad f(x) = (x, 0)$$

es inyectiva (si $x_1 \neq x_2$, entonces $(x_1, 0) \neq (x_2, 0)$). Por el otro lado, $\mathbb{R}\times\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, así que $\mathbb{R}\times\mathbb{N} \preceq \mathbb{R}\times\mathbb{R} \approx \mathbb{R}$. Concluimos por el teorema Cantor-Bernstein que $\mathbb{R} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{R}$.
Igualmente, uno puede mostrar $\mathbb{R}\times\mathbb{N} \preceq \mathbb{R}$ sin utilizar el hecho que $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{R}$. En efecto, se sabe que $\mathbb{R} \approx (0, 1)$. Entonces, basta ver que $(0, 1) \times \mathbb{N} \preceq \mathbb{R}$. Define:

$$f \colon (0, 1) \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \qquad f((x, n)) = x + n.$$

Sean $(x_1, n_1), (x_2, n_2) \in (0, 1) \times \mathbb{N}$ dos pares distintos. Si $n_1 \neq n_2$, entonces $f((x_1, n_1)) = x_1 + n_1 \neq x_2 + n_2$ porque $x_1 - x_2 \neq n_2 - n_1$ (el valor absoluto de $x_1 - x_2$ es menor que 1 mientras que el valor absoluto de $n_2 - n_1$ es a lo menos 1). Luego, si $n_1 = n_2 = n$, entonces $x_1 \neq x_2$ y

$$f((x_1, n_1)) = x_1 + n \neq x_2 + n = f((x_2, n_2)).$$

□

Pregunta 5. Sabemos que para todo $u, v \in \mathbb{Z}$ y p, q primos, se cumple que:

$$u \equiv_p v \quad \wedge \quad u \equiv_q v \quad \Longrightarrow \quad u \equiv_{p \cdot q} v$$

Demuestre que para todo primo $p \geq 7$ se cumple que:

$$(p^2 - 1) \mod 10 = 0 \quad \text{o} \quad (p^2 + 1) \mod 10 = 0$$

Hint: El 2 es primo.

Demostración. Ya que p es un primo mayor o igual a 7, es impar y no es divisible por 5. Por lo tanto, y p^2-1 y p^2+1 son ambos par. Ahora, ya que $10 = 2 \cdot 5$ y $2, 5$ son coprimos, basta ver que uno de los números p^2-1, p^2+1 es divisible por 5. Es decir, hay que ver que el resto de p^2 módulo 5 es 1 o 4. Eso se puede ver a través de la siguiente tabla, recordando que p no es divisible por 5:

p mód 5	1	2	3	4
p^2 mód 5	1	4	4	1

□