# Más allá de las definiciones

Clase 27

IIC 1253

Prof. Sebastián Bugedo

# Epílogo: Más allá de las definiciones

## Cuestiones filosóficas en matemática y computación



# Outline

Una historia lógica

Cuestiones filosóficas

Computabilidad

Concierto final

# Primer Acto: Lógica Simbólica (500 a.C. - Siglo XIX)



*"La muerte de Sócrates"*, Jacques Louis David, 1787

# Primer Acto: Lógica Simbólica

Lógica como **sistema formal** para determinar **validez** de argumentos

Todas las personas son mortales.
Sócrates es persona.
---
Por lo tanto, Sócrates es mortal.

¿Es válido este argumento/conclusión?

# Primer Acto: Lógica Simbólica

Lógica como **sistema formal** para determinar **validez** de argumentos

Usada en debates formales

- ¿Quién gana en una *batalla formal*?
- En esencia: *¿Esta conclusión se obtiene de estas premisas?*
- Se usa el lenguaje natural

¿Por qué el uso de lenguaje natural es un problema?

# Primer Acto: Lógica Simbólica

Sutilezas del lenguaje natural

*Eric no cree que María pueda pasar una prueba.*

Paradojas del lenguaje natural

*Esta oración es mentira.*

Hay que buscar un lenguaje simbólico para formular la lógica

# Segundo Acto: Lógica Algebraica (mitad a finales S. XIX)




Ilustración de John Tenniel para *"Alice's Adventures in Wonderland"* de Lewis Carroll, 1865

# Segundo Acto: Lógica Algebraica

Intentos de formulación matemática

- George Boole (1847) y Charles L. Dodgson (Lewis Carroll)
- Ernst Schröder (1890), anticipando la importancia de algoritmos:

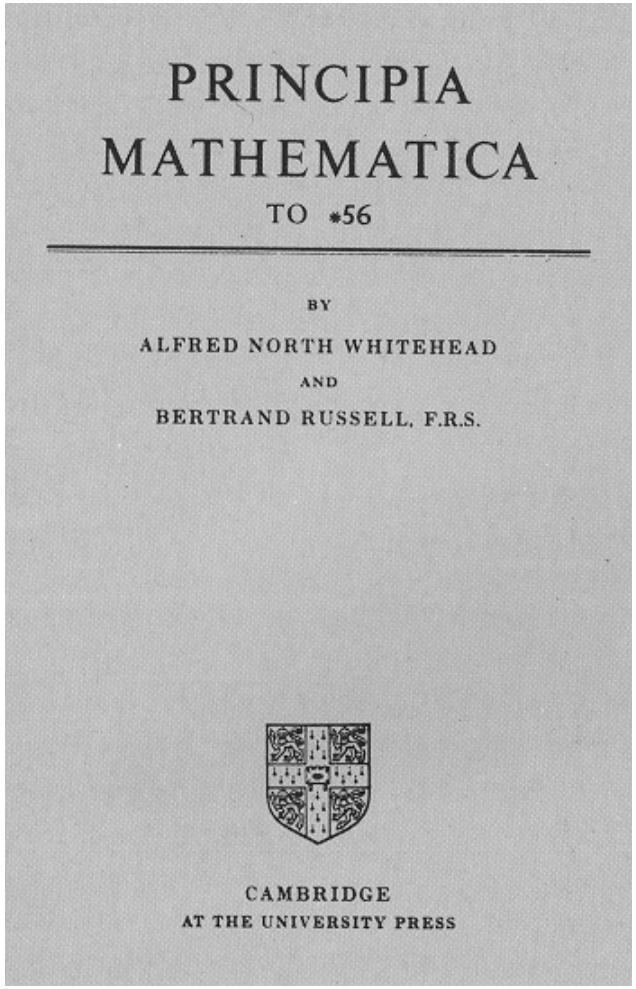
*Un método rápido para obtener consecuencias*
*a partir de premisas, me parece uno de los más nobles,*
*si es que no el objetivo último de la matemática y la lógica*

No obstante, nuevas paradojas surgieron

- Paradojas en demostraciones matemáticas
- "Teoremas" demostrados que resultaron ser falsos

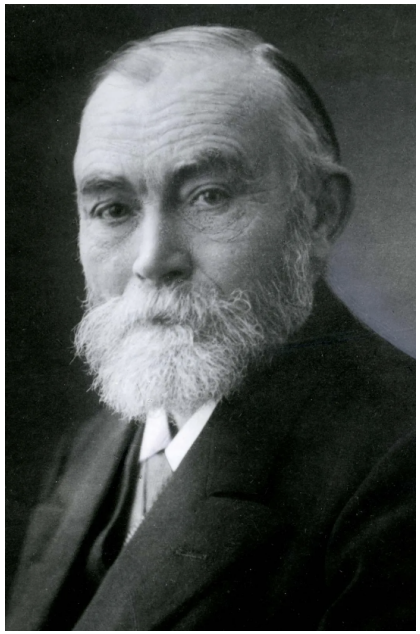
Se necesita mayor grado de formalización

# Tercer Acto: Lógica Matemática (fin. S. XIX - med S. XX)

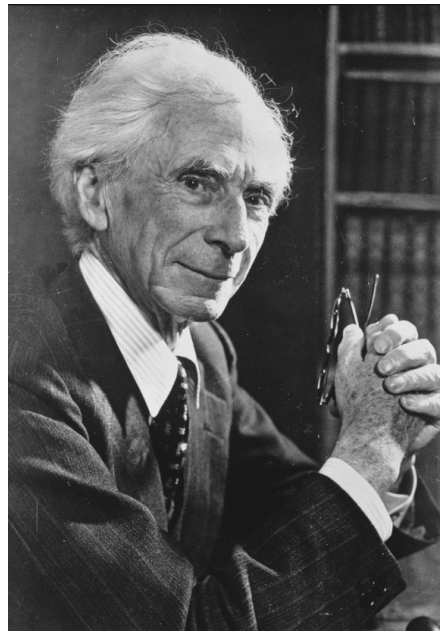



*"Principia mathematica"*, Bertrand Russell y Alfred North Whitehead, 1913

# Tercer Acto: Lógica Matemática



Gottlob Frege



Bertrand Russell

Frege (1879): Lógica como lenguaje para la matemática

Paradoja de Russell (1901): Contradicciones en teoría de conjuntos

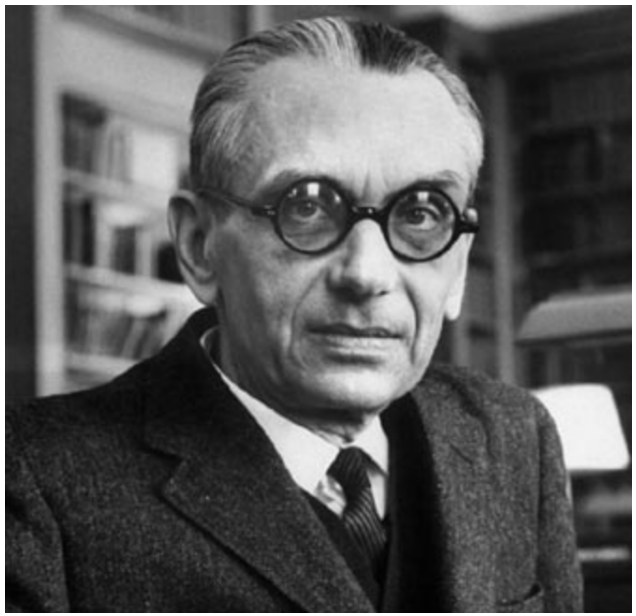
# Tercer Acto: Lógica Matemática



David Hilbert

*Programa de Hilbert* (1920) para probar consistencia de un conjunto de axiomas completo... un sistema para deducir todas las verdades posibles

# Tercer Acto: Lógica Matemática



Kurt Gödel

Teoremas de Incompletitud (1931)

1. Un sistema capaz de formar sentencias sobre lo que puede demostrar, tiene sentencias que el sistema no puede demostrar
2. Un sistema capaz de formar sentencias sobre la aritmética no puede probar su propia consistencia

# Tercer Acto: Lógica Matemática



Alonzo Church



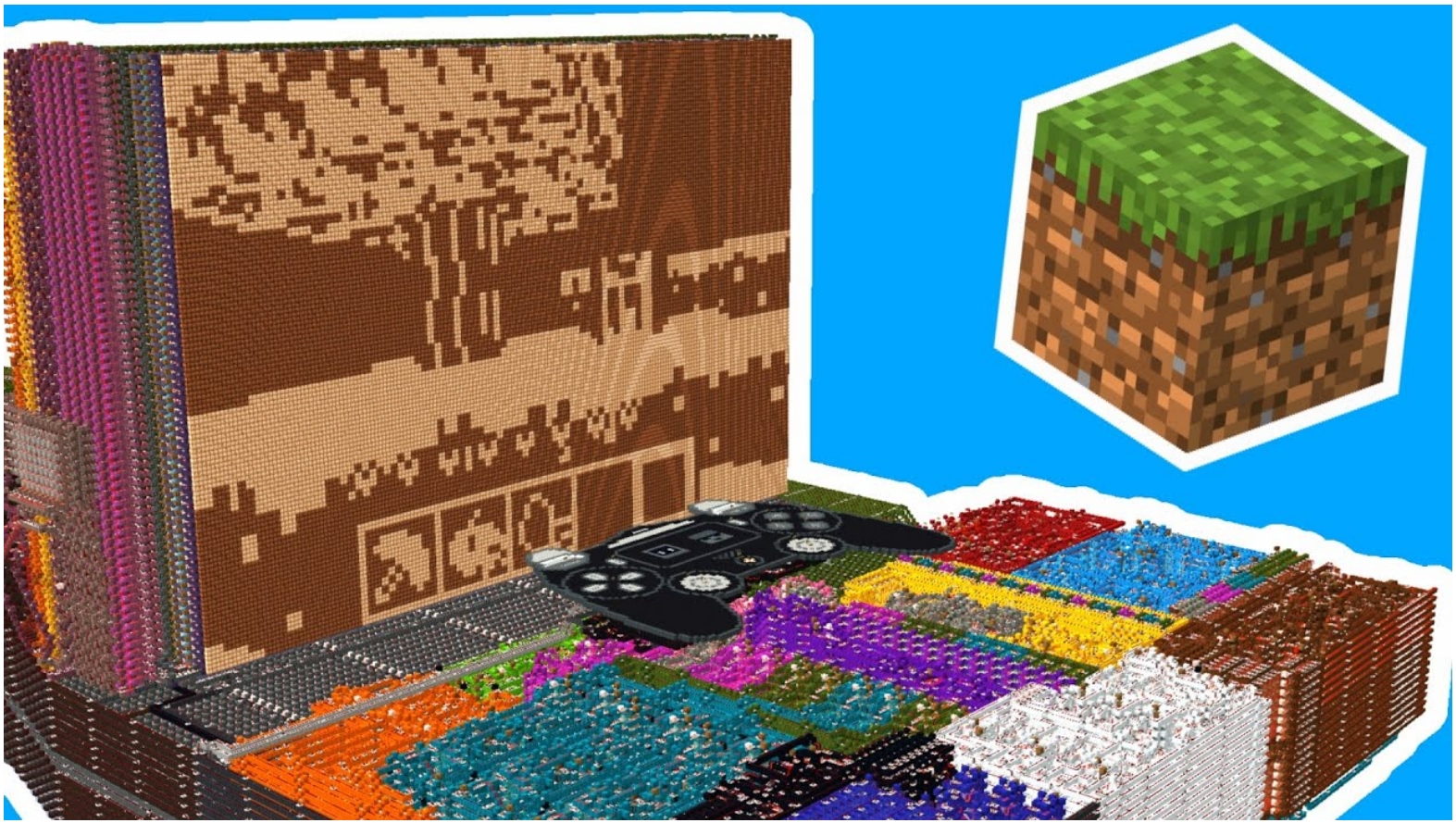
Alan Turing

Cálculo Lambda (1936) y Máquinas de Turing (1936)

Existen problemas que ningún algoritmo puede resolver

La lógica siguió su desarrollo: ya no como fundamento definitivo sino como un área más de la matemática

# Cuarto Acto: Lógica en computación



*"I made Minecraft in Minecraft with redstone!"*, sammyuri, 2022, link

# Cuarto Acto: Lógica en computación

Lógica como caracterización de **computabilidad** y **solvability**

El nuevo hogar de la lógica: Ciencia de la computación

¿La formalización es suficiente?

# Outline

Una historia lógica

Cuestiones filosóficas

Computabilidad

Concierto final

¿Qué es una pregunta filosófica?

# Características

Las **cuestiones filosóficas**

- No dependen necesariamente de la experiencia
- No se acumulan
- Son universales
- Son producto de un razonamiento

¿Qué otros tipos de pregunta existen?

# Preguntas filosóficas en matemática

Ejemplos!

- ¿La matemática es descubierta o inventada?
- ¿Los números existen en la realidad?
- ¿Las demostraciones existenciales son válidas si no pueden mostrar el objeto explícitamente?
- ¿Debemos asumir un axioma porque es intuitivo?
- ¿Qué es la verdad en matemática?

¿Qué preguntas filosóficas
podríamos tener en computación?

# Outline

Una historia lógica

Cuestiones filosóficas

Computabilidad

Concierto final

# Lenguajes y problemas

## Definición (*en chileno*)

Un **lenguaje** es un conjunto de palabras finitas.

El **problema de decisión** asociado a un lenguaje es determinar si una palabra pertenece o no al lenguaje.

¿Qué problemas conocemos en computación?
¿Cuáles son sus problemas de decisión?

# Decidibilidad

Definición (*en chileno*)

Un problema se dice **decidible** si existe un algoritmo que permite resolver el problema de decisión para toda palabra.

¿Todo problema es decidible?

# Problemas indecidibles

Si pensamos que un algoritmo $A$ tiene una codificación $cod(A)$, podemos ver a los algoritmos como

$$cod(A) = 00010\ldots101111$$

¿Cuántos elementos tiene el siguiente conjunto?

$$M = \{cod(A) \mid A \text{ es un algoritmo}\}$$

Este conjunto cumple $|M| = |\mathbb{N}|$

# Problemas indecidibles

Ahora, consideremos que un problema de decisión (Sí/No) se puede ver como una función binaria:

- Sea $f$ la función que indica si una palabra está o no en el lenguaje
- Como la decisión es binaria, $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$
- Cada función de este tipo representa un problema de decisión

¿Cuántos elementos tiene el siguiente conjunto?

$$F = \{f \mid f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}\}$$

Se puede demostrar que $|F| > |\mathbb{N}|$

# Problemas indecidibles

De este resultado, concluimos que existen problemas de decisión para los que **no existe un algoritmo que los resuelva**

No todo problema tiene solución algorítmica

# Preguntas filosóficas en computación

Ejemplos!

- ¿Qué es computar? ¿Qué significa no poder computar algo?
- ¿Los algoritmos se descubren o se inventan?
- ¿La noción de algoritmo captura la idea de computación efectiva?
- ¿La mente humana se puede modelar con un computador?

# Outline

Una historia lógica

Cuestiones filosóficas

Computabilidad

Concierto final



# Última vocalización






Miau, miau, hörst du mich schreien?
Miau, miau, ich will dich freien.

Folgst du mir aus den Gemächern,
singen wir hoch auf den Dächern.

Miau, komm, geliebte Katze,
miau, reich mir deine Tatze!

