Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Verano 2026

MAT1610 ⋆ Cálculo I
Interrogación 3
Solución.

1. *a*) (3.0 puntos) Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{n}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{2t}{n}\right)+\cdots+\operatorname{sen}\left(\frac{(n-1)t}{n}\right)\right\}=\frac{1-\cos(t)}{t}$$

b) (3.0 puntos) Si $y=\displaystyle\int_1^{2x-1}\frac{x\,t}{\cos(\pi t)}\,dt+\int_0^1 te^{2t}\,dt$

i) Calcule $y(1)$.

ii) Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ en $x=1$.

Solución

a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{n}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{2t}{n}\right)+\cdots+\operatorname{sen}\left(\frac{(n-1)t}{n}\right)\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{sen}\left(\frac{it}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{t}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{sen}(\frac{it}{n})\cdot\frac{t}{n}$$

$$\Delta x_i=\Delta x=\frac{t}{n},\quad x_i=i\Delta x=\frac{it}{n},\ i=1,2,\cdots,n-1$$

$$=\frac{1}{t}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{sen}(x_i)\,\Delta x_i$$

$$=\frac{1}{t}\int_0^t\operatorname{sen}(x)dx=\frac{1}{t}(-\cos(x))\Big|_0^t=\frac{1-\cos t}{t}$$

b) i)

$$y(1)=\int_1^1\frac{t}{\cos(\pi t)}dt+\int_0^1 te^{2t}dt$$

la primera integral vale cero, para la segunda la calculamos por partes

$$u=t\Rightarrow du=dt$$

$$dv=e^{2t}\Rightarrow u=\frac{e^{2t}}{2}$$

$$y(1)=0+\left(\frac{te^{2t}}{2}\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2t}dt\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^2-0\right)-\frac{1}{4}e^{2t}\Big|_0^1=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}\left(e^2-1\right)=\frac{1}{4}\left(e^2+1\right)$$

ii)

$$y = x\int_1^{2x-1} \frac{t}{\cos(\pi t)}dt + \int_0^1 te^{2t}dt$$

$$\frac{dy}{dx} = \int_1^{2x-1} \frac{t}{\cos(\pi t)}dt + x\frac{2x-1}{\cos\pi(2x-1)}\cdot 2$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = \int_1^1 \frac{t}{\cos(\pi t)}dt + \cdot 1\frac{1}{-1}\cdot 2 = -2$$

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	0.5 ptos	Por exxpresar el límite como una sumatoria
C2	0.5 ptos	Por darse cuenta que $[0, t]$ es el intervalo de integración
C3	0.5 ptos	Por ingresar t para formar $\Delta x_i = t/n$
C4	0.5 ptos	Por identificar al x_i
C5	0.5 ptos	Por escribir correctamente la integral
C6	0.5 ptos	Por el resultado
C7	0.5 ptos	Por la integral cuyo valor es 0.
C8	0.5 ptos	Por lintegrar correctamente por partes
C9	0.5 ptos	Por el resultado
C10	0.5 ptos	Por sacar la x como constante antes de derivar con respecto a x.
C11	0.5 ptos	Por derivar correctamente(T.F.C.) y darse cuenta que la segunda integral es cons
C12	0.5 ptos	Por el resultado correcto

2. Calcule las siguientes integrales

a)(3 puntos) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(4-x^2)^{3/2}}dx$

b)(3 puntos) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2\,(x^2+1)}dx$

Solución.

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(4-x^2)^{3/2}}dx$, haciendo $x = 2\operatorname{sen} t \Rightarrow dx = 2\cos t\,dt$

resulta

$$\begin{aligned} &= \int \frac{4\operatorname{sen}^2 t \cdot 2\cos t\,dt}{8\cos^3 t} = \int \tan^2 t\,dt = \int \left(\sec^2 t - 1\right) dt \\ &= \tan t - t + C = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} - \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + C \end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2\,(x^2+1)}dx$, separando en fracciones parciales, tenemos

$$\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2\,(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Calculando las constantes resultan:

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 1, \quad D = 1$$

Por tanto

$$\begin{aligned} &= \int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{x+1}{x^2+1}dx \\ &= -\frac{1}{x-1} - \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x + C. \end{aligned}$$

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	1.0 ptos	Por el cambio de variable correspondiente
C2	1.0 ptos	Por el cálculo correcto de la integral
C3	1.0 ptos	Por la respuesta correcta **bajar 0.5 ptos** si omite la constante
C4	1.0 ptos	Por la separación correcta en fracciones
C5	0.5 ptos	Por el cálculo de las constantes correctas
C6	1.0 ptos	Por las tres integrales correctas
C7	0.5 ptos	Por la constante de integración

3. *a*) (3 puntos) Hallar una función f y un número a tal que

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2} dt = 2\sqrt{x} \quad \text{para toda } x > 0$$

b) (3 puntos)Demuestre que

$$\int \operatorname{sen}^n x dx = -\frac{1}{n} \cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x dx$$

donde $n \geq 2$ es un número entero.

Solución.

a) Derivando con respecto a x, la ecuación

$$6 + \int_2^x \frac{f(t)}{t^2} dt = 2\sqrt{x}, x > 0$$

resulta

$$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f(x) = x^{3/2}$$

Asi

$$6 + \int_a^x \frac{t^{3/2}}{t^2} dt = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 6 + 2\sqrt{t}\Big|_a^x = 2\sqrt{x}$$
$$6 + (2\sqrt{x} - 2\sqrt{a}) = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 6 = 2\sqrt{a} \Leftrightarrow a = 9$$

Por tanto

$$f(x) = x^{3/2}, \quad a = 9$$

b) Sea

$$u = \operatorname{sen}^{n-1} x \Rightarrow du = (n-1) \operatorname{sen}^{n-2} x \cos x dx.$$

Entonces

$$du = (n-1) \operatorname{sen}^{n-2} x \cos x dx$$
$$dv = \operatorname{sen} x dx \Rightarrow v = -\cos x$$

así que la integración por partes da

$$\int \operatorname{sen}^n x dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1) \int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x dx$$

Dado que $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ tenemos

$$\int \operatorname{sen}^n x dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1) \int \operatorname{sen}^{n-2} x dx - (n-1) \int \operatorname{sen}^n x dx$$

resolvemos esta ecuación para la integral deseada tomando el último término del lado derecho y pasándolo al lado izquierdo:

$$n\int \operatorname{sen}^n xdx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} xdx$$

o bien

$$\int \operatorname{sen}^n xdx = -\frac{1}{n}\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} xdx$$

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	1.0 pto	Por derivar correctamente la ecuación usando el T.F.C.
C2	1.0 pto	Por determinar correctamente la función $f(x)$.
C3	1.0 pto	Por determinar correctamente el valor del parámetro a.
C4	1.0 pto	Por elegir correctamente integración por partes en la demostración.
C5	1.0 pto	Por el desarrollo correcto de la integración por partes.
C6	1.0 pto	Por obtener correctamente la fórmula de recurrencia solicitada.

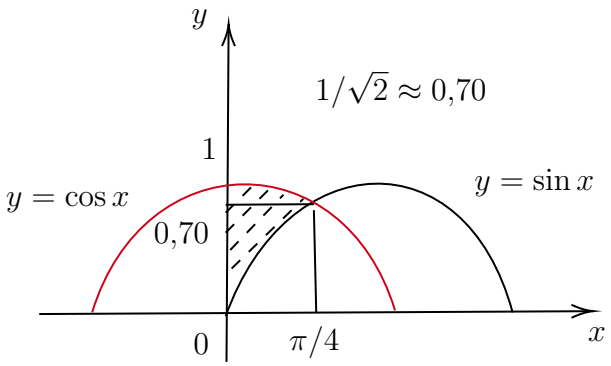
4. Considere la región plana encerrada entre las curvas: $y = \text{sen}(x)$, $y = \cos(x)$ y el eje Y para $x \geq 0$.

   a) (2 puntos) Calcule el área de la región

   b) (2 puntos) Calcule el volumen del sólido que se genera al rotar la región en torno al eje X,

   c) (2 puntos) Calcule el volumen del sólido que se genera al rotar la región en torno al eje Y,

   Solución.



   a) Sea A el área de la región indicada, entonces

$$A = \int_0^{\pi/4} (\cos(x) - \text{sen}(x))\, dx = \text{sen}(x)\Big|_0^{\pi/4} + \cos(x)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

   b) Sea V_x el volumen del sólido sólido que se genera al rotar la región en torno al eje X, entonces

$$A = \pi \int_0^{\pi/4} \cos^2(x)\, dx - \pi \int_0^{\pi/4} \text{sen}^2(x)\, dx = \pi \int_0^{\pi/4} (\cos^2(x) - \text{sen}^2(x))\, dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi/4} \cos(2x)\, dx = \frac{\pi}{2} \text{sen}(2x)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2}$$

   c) Sea V_y el volumen del sólido sólido que se genera al rotar la región en torno al eje Y, entonces

$$V_y = 2\pi \int_0^{\pi/4} x\, (\cos(x) - \text{sen}(x))\, dx$$

   integrando por partes: $u = x \Rightarrow du = dx$, $\quad dv = (\cos x - \text{sen}\, x)\, dx \Rightarrow v = \text{sen}(x) + \cos(x)$

$$= 2\pi (x(\text{sen}(x) + \cos(x))\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} (\text{sen}(x) + \cos(x)) = 2\pi(\sqrt{2}\, \frac{\pi}{4} - 1)$$

   Otra forma es

$$V_y = \pi \int_0^{1/\sqrt{2}} \text{arc}\,\text{sen}^2\, y\, dy + \pi \int_{1/\sqrt{2}}^1 \text{arc}\cos^2 y\, dy$$

   e integrar por partes.

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	1.0 pto	Por identificar correctamente los límites de integración.
C2	1.0 pto	Por plantear y calcular correctamente el área de la región.
C3	1.0 pto	Por identificar correctamente el método para el volumen en torno al eje X.
C4	1.0 pto	Por el cálculo correcto del volumen en torno al eje X.
C5	1.0 pto	Por identificar correctamente el método para el volumen en torno al eje Y.
C6	1.0 pto	Por el cálculo correcto del volumen en torno al eje Y.