Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Verano 2026

MAT1610 ⋆ Cálculo I
Interrogación 2
Solución

1. *a*) (3.0 puntos) Usando el teorema del valor medio demuestre la desigualdad

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \quad \forall x > 0.$$

b) (3.0 puntos) El largo de un rectángulo se incrementa a razón de 8 cm/s y el ancho a razón de 3 cm/s. Cuando el largo es $20cm$ y el ancho es $10cm$, ¿que tan rápido se incrementa el área del rectángulo?

Solución.

a) Sea $f(x) = \ln(x+1)$, para $x > 0$ y en el intervalo $[0, x]$, $f(x)$ es continua, y derivable en $(0, x)$ entonces por el T.V.M. existe $\epsilon \in (0, x)$ tal que

$$f'(\epsilon) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon + 1} = \frac{\ln(x+1)}{x}, \ 0 < \epsilon < x$$

por otra parte, para todo $x > 0$

$$0 < \epsilon < x \Leftrightarrow 1 < 1 + \epsilon < x + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{\epsilon + 1} < 1,$$

Por tanto

$$\frac{1}{x+1} < \frac{\ln(x+1)}{x} < 1 \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \quad \forall x > 0$$

b) Sea un rectángulo de largo l y de ancho b entonces el área A es $A = bl$ note que $l = l(t)$, y $b = b(t)$, así

$$\frac{dA}{dt} = b\frac{dl}{dt} + l\frac{db}{dt} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 10\,\text{cm}\,8\ \text{cm/s} + 20\,\text{cm}\,3\ \ \text{cm/s} = 140\,\text{cm}^2\text{s}$$

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	0.5 ptos	Por elegir $f(x)$
C2	0.5 ptos	Por indicar la condición de continuidad y derivabilidad
C3	0.5 ptos	Por aplicar el T.V.M.
C4	1.0 ptos	Por establecer $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{\epsilon+1} < 1$
C5	0.5 ptos	Por la conclusión
C6	0.5 ptos	Por el área del rectángulo.
C7	2.0 ptos	Por la derivada del área en función de t
C8	0.5 ptos	Por el resultado

2. (6.0 puntos) Un pedazo de alambre de 10 m de largo está cortado en dos piezas. Una pieza está doblada en forma de cuadrado y la otra de un triángulo equilátero. ¿Cómo debe cortarse el alambre para que el área total encerrada sea

   a) un máximo?.

   b) un mínimo?.

   Solución.

   Sea, $4x$ el perímetro del cuadrado, entonces cada lado es x con lo que su área es $A_1(x) = x^2$.

   y por tanto $(10 - 4x)$ el perímetro del triángulo equilátero, entonces cada lado es $\frac{10-4x}{3}$ y su área es $A_2(x) = \frac{1}{2}\frac{(10-4x)}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{(10-4x)}{3}$,

   donde: $0 \leq 4x \leq 10 \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{5}{2}$ que es el intervalo donde se analiza el área total $A(x)$, es decir

$$A(x) = A_1(x) + A_2(x),\ 0 \leq x \leq \frac{5}{2}$$

$$A(x) = x^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}(10 - 4x)^2$$

$$A'(x) = 2x - \frac{2}{9}\sqrt{3}(10 - 4x) = 0 \Rightarrow x = \frac{10\sqrt{3}}{9 + 4\sqrt{3}} \in \left[0, \frac{5}{2}\right]$$

   Se trata de encontrar los extremos absolutos (o globales) de $A(x)$ an $\left[0, \frac{5}{2}\right]$, asi

$$A(0) = \frac{25}{9}\sqrt{3} \approx 4{,}06$$

$$A\left(\frac{10\sqrt{3}}{9 + 4\sqrt{3}}\right) \cong\leftarrow \text{ min de } A(x)$$

$$A\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4} \approx 6{,}25 \leftarrow \text{ máx de } A(x)$$

   Nota. Lo anterior se puede concluir si hacer estos cálculos, simplemente observando que $A(x)$ es una función cuadrática cóncava hacia arriba($a = 1 + \frac{4\sqrt{3}}{9} > 0$).

   En conclsión

   El máximo de $A(x)$ se tiene para $x = \frac{5}{2}$ con lo que $4x = 10$, solo área del cuadrado y área del triágulo en 0.

   El mínimo de $A(x)$ se tiene para $\frac{10\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}$, área del cuadrado más área del triángulo.

   Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	0.5 ptos	Por elegir la partición de los 10m
C2	0.5 ptos	Por el área del cuadrado
C3	1.0 ptos	Por el área del triángulo correcta
C4	1.0 ptos	Por el área total y su dominio
C5	1.0 ptos	Por la derivada correcta del área total
C6	0.5 ptos	Por el punto crítico correcto
C7	0.5 ptos	Por darse cuenta que se trata de máx. y mín. en un intervalo cerrado
C8	0.5 ptos	Por el corte del pedazo para el máx.
C9	0.5 ptos	Por el corte del pedazo para el mín.

3. (6.0 puntos) Considere la función

$$y = \frac{\ln x}{x^2}$$

Grafique $f(x)$ indicando a lo menos: Dominio, asintotas, intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento, máximos y mínimos, concavidades e inflexiones.

Solución.

a) Dominio de f. Dom $f = (0, \infty)$

b) Asíntotas

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$$

$x = 0^+$ es asíntota vertical por la derecha

Asíntotas oblicuas u horizontales:

$$y = ax + b$$

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x^2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^3} (\frac{0}{0}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{3x^3} = 0$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} - 0 \cdot x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} (\frac{0}{0}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

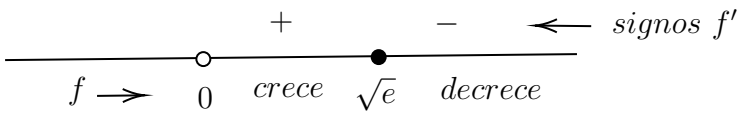
Por tanto

$y = 0$ es una asíntota horizontal para $f(x)$ con $x > 0$

Puntos críticos de $f(x)$

$f'(x) = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3} = 0 \Rightarrow 1 - 2\ln x = 0$, es decir, $x = \sqrt{e}$, f' se indetermina en $x = 0$ pero, dicho valor no es parte del dominio. Así, que el únicos punto crítico de f es $x = \sqrt{e}$.

Los intervalos donde f es creciente y los intervalos donde f es decreciente.



$f'(x) > 0$ en $(0, \sqrt{e})$ entonces f es creciente.

$f'(x) < 0$ en $(\sqrt{e}, \infty)$ entonces f es decreciente.

Valores: máximos y mínimos locales de f.

f' cambia de positiva a negativa en $x = \sqrt{e}$ por lo que $f(\sqrt{e}) = \dfrac{1}{2e}$ es un valor máximo local de f.

$f(x)$ no tiene un valor mínimo.

(También se puede justificar con el criterio de la segunda derivada)

Los intervalos donde f es cóncava hacia arriba y los intervalos donde f es cóncava hacia abajo.

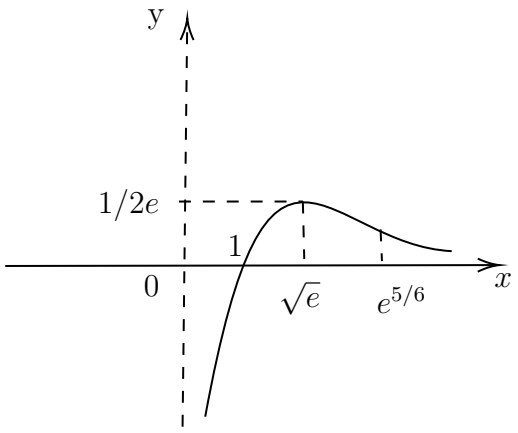
Intervalo	$(0, e^{5/6})$	$(e^{5/6}, \infty)$
Signo de f''	-	+

$f''(x) < 0$ en $(0, e^{5/6})$ entonces f es cóncava hacia abajo.

$f''(x) > 0$ en $(e^{5/6}, \infty)$ entonces f es cóncava hacia arriba.

Dado que $e^{5/6} \in \text{Dom} f$ entonces el punto $(e^{5/6}, 5/6)$ es punto de inflexión para f.

Gráfico de f.



Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	0.5 ptos	Por el dominio
C2	0.5 ptos	Por la asíntota vertical bien justificada
C3	0.5 pto	Por descartar la asíntota oblicua
C5	0.5 ptos	Por la asíntota horizontal bien justificada
C5	0.5 ptos	Por la primera derivada correcta
C6	0.5 ptos	Por los crecimientos y decrecimientos correctos
C7	0.5 ptos	Por el máximo de f bien justificado
C8	0.5 ptos	Por la segunda derivada correcta
C9	0.5 ptos	Por las concavidades de f
C10	0.5 ptos	Por el punto de inflexión bien justificado
C11	1.0 ptos	Por el gráfico de f

4. *a*) (3.0 puntos) Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x) - 2x - x^3}{e^x - e^{-x} - 2x}$$

b) (3.0 puntos) Considere la función $f(x) = x\cos(x)$

(i) Determine una fórmula para la aproximación lineal de $f(x)$ en $x = 0$

(ii) Use la aproximación lineal encontrada, para obtener una aproximación de $f(0,1)$.

Solución.

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x) - 2x - x^3}{e^x - e^{-x} - 2x}(\frac{0}{0}) = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x) - 2 - 3x^2}{e^x + e^{-x} - 2}(\frac{0}{0}) = \lim_{x\to 0} \frac{-4\operatorname{sen}(2x) - 6x}{e^x - e^{-x}}(\frac{0}{0})$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-8\cos(2x) - 6}{e^x + e^{-x}} = \frac{-14}{2} = -7$$

b) Sea y_t la ecuación de la tangente a la curva $f(x) = x\cos x$ en el punto $x_0 = 0$ e $y_0 = f(0) = 0$, asi

$$y_t - 0 = f'(0)(x - 0), \quad f'(x) = \cos x + x\operatorname{sen} x \Rightarrow f'(0) = 1$$

por tanto

$$y_t = f'(0)\, x = x$$

luego $f(x) \approx y_t \Rightarrow f(x) = x\cos x \approx x$

de donde

$$f(0,1) \approx 0,1$$

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	0.5 ptos	Por verificar la condición para aplicar L'Hopital
C2	1.0 ptos	Por la primera derivada correcta
C3	0.5 ptos	Por verificar la condición para aplicar L'Hopital
C4	0.5 ptos	Por la segunda derivada correcta
C5	0.5 ptos	Por el resultado correcto
C6	0.5 ptos	Por determinar $y_0 = 1$
C7	1.0 ptos	Por la ecuación de la recta tangente en el punto $(0,1)$
C8	0.5 ptos	Por indicar que la aproximación, con la recta tangente en $(0,1)$
C9	1.0 ptos	Por obtener una aproximación de $f(0,1)$