Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Verano 2026

MAT1610 ⋆ Cálculo I
Interrogación 1
Solución

1. *a*) (3.0 puntos) Calcule los siguientes límites

$$\text{i) } \lim_{x\to 1} \frac{|x^2-4x+5|-2x^2}{x^2-1}, \quad \text{ii) } \lim_{x\to 1} \frac{x-x^2}{\operatorname{sen}[(2x-1)\pi]}$$

Hint: Para ii) si así lo estima puede hacer $t = x-1$.

b) (3.0 puntos) Encuentre la asíntotas horizontales y verticales de la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$$

Solución.

a) Dado que $x^2-4x+5 = (x-2)^2+1 > 0 \Rightarrow |x^2-4x+5| = x^2-4x+5$, también puede argumentar que: $a = 1 > 0$ y $\Delta < 0 \Rightarrow x^2-4x+5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, luego

$$\lim_{x\to 1} \frac{|x^2-4x+5|-2x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-4x+5-2x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{-x^2-4x+5}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-(x-1)(x+5)}{(x-1)(x+1)} = -\lim_{x\to 1} \frac{x+5}{x+1} = -3$$

b) Notemos que $\operatorname{sen}[(2x-1)\pi] = \operatorname{sen}[-(\pi-2x\pi)] = -\operatorname{sen}(\pi-2\pi x) = -\operatorname{sen}(2\pi x)$, entonces

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-x^2}{\operatorname{sen}[(2x-1)\pi]} = \lim_{x\to 1} \frac{x(1-x)}{-\operatorname{sen} 2(\pi x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x(1-x)}{\operatorname{sen} 2\pi(1-x)}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{\dfrac{\operatorname{sen}[2\pi(1-x)]}{2\pi(1-x)} \cdot 2\pi} = \frac{1}{2\pi}$$

c) Asíntotas verticales
Dado que

$$\lim_{x\to (5/3)^+} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \infty, \qquad \lim_{x\to (5/3)^-} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = -\infty$$

entonces $x = \dfrac{5}{3}$ es una asíntota vertical para $f(x)$
Asintotas horizontales

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3x-5}$$

luego

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

análogamente

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3x-5}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}}=-\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Por tanto $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ son asíntotas horizontales para $f(x)$

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	0.5 ptos	Por justificar bien que $x^2-4x+5>0$
C2	0.5 ptos	Por la factorizacion
C3	0.5 pto	Por el valor del límite correcto
C5	0.5 ptos	Por la transformación trigonométrica
C5	0.5 ptos	Por darse cuenta del límite notable $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
C6	0.5 ptos	Por el valor del límite correcto.
C7	0.5 ptos	Por cada límite cuando $x\to\dfrac{5}{3}^{\pm}$ total 1.0 pto.
C8	0.5 ptos	Por la conclusión de la asíntota vertical
C9	0.5 ptos	Por cada límite cuando $x\to\pm\infty$ total 1.0 pto.
C10	0.5 pto	Por la conclusión de que $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ son asíntotas horizontales.

2. Sea la función $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\tan(x)} & , \quad x\neq 0\\ a & , \quad x=0\end{cases}$$

donde $a\in\mathbb{R}$ es una constante.

a)(3.0 puntos) Calcule $f'(x), \forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ con $x\neq 0$.

b)(3.0 puntos) Determine el valor de a de modo que $f(x)$ sea continua en $x=0$, y calcule $f'(0)$.

Solución.

a) $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ con $x\neq 0$ se tiene que

$$f'(x)=\frac{2x\tan(x)-x^2\sec^2(x)}{\tan^2(x)}$$

b) Para que $f(x)$ sea continua en $x=0$ se debe tener

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=a \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\tan(x)}=a \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen}(x)}x\cos(x)=1\cdot 0\cdot 1=0$$

Por tanto $a=0$

Ahora, aplicando la definición de derivada para calcular $f'(0)$ se tiene,

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\tan(x)}-a}{x}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen}(x)}\cos(x)=1$$

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	3.0 ptos	Por obtener $f'(x)$. sin error
C2	0.5 ptos	Por indicar la condición de continuidad en el punto $x=0$
C3	0.5 ptos	Por la operatoria para calcular el límite cuando x tiende a 0
C4	1.0 ptss	Por el valor de a correcto
C5	0.5 ptos	Por escribir correctamente la derivada de $f(x)$ por definición en $x=0$
C6	0.5 ptos	Por determinar el valor correcto de la derivada $f'(0)$.

3. *a*) (3.0 puntos) Si $f(x) = x^2 + 10\,\mathrm{sen}\,x$, $\forall \in I = (-1, 2)$. Demuestre que existe un número $c \in I$ tal que $f(c) = 1$.

   b) (3.0 puntos) Demuestre que

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} e^{\mathrm{sen}(\pi/x)} = 0$$

Solución.

a) Sea $H(x) = x^2 + 10\,\mathrm{sen}(x) - 1$ una función continua en $\mathbb{R}$, por ser una suma de funciones continuas. Tomando el intervalo $[-1, 2]$ donde también $H(x)$ es continua y cómo
$H(-1) = (-1)^2 + \mathrm{sen}(-1) - 1 = 1 - 10\,\mathrm{sen}(1) - 1 < 0$ y $H(2) = 2^2 + 10\,\mathrm{sen}(2) - 1 > 0$
entonces por el teorema del valor intermedio

$\exists c \in (-1, 2)\,/H(c) = 0$, pero $H(c) = c^2 + 10\,\mathrm{sen}(c) - 1 = 0 \Rightarrow f(c) - 1 = 0 \Rightarrow f(c) = 1$

b)

Dado que $-1 \leq \mathrm{sen}(\dfrac{\pi}{x}) \leq 1$, $\forall x \neq 0$, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{-1} \leq e^{\mathrm{sen}(\frac{\pi}{x})} \leq e$, por tanto

$e^{\mathrm{sen}(\frac{\pi}{x})}$ está acotada, y cómo $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ entonces

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} e^{\mathrm{sen}(\frac{\pi}{x})} = 0$$

Análogamente por el teorema del sandwich.

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	1 pto	Define la función $H(x) = f(x) - 1$ e indica que es continua en $[\,-1, 2\,]$.
C2	0.5 ptos	Evalúa $H(-1)$ correctamente y justifica que $H(-1) < 0$.
C3	0.5 ptos	Evalúa $H(2)$ correctamente y justifica que $H(2) > 0$.
C4	1 ptos	Aplica correctamente el TVI y concluye que existe $c \in (-1, 2)$ tal que $f(c) = 1$
C5	1 ptos	Acota correctamente la función exponencial usando $-1 \leq \mathrm{sen}(\pi/x) \leq 1$.
C6	1 ptos	Determina correctamente que $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$.
C7	1 ptos	Aplica correctamente el Teorema del Compresión.

4. *a*) (3.0 puntos) Para que valores de a, b, c los gráficos de $f(x) = x^3 + ax + b$ y $g(x) = x^3 + cx$ tienen una tangente en común en el punto $(2, 2)$.

   b) (3.0 puntos) Considere la función $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)$. Muestre que las derivadas de f satisfacen la ecuación.

$$f'' - (f')^2 = 1$$

Solución.

a) Para que f y g tengan una tangente en común en el punto $(2, 2)$ se debe tener que:

$$\begin{aligned} f(2) = 2 &\Rightarrow 8 + 2a + b = 2 \\ g(2) = 2 &\Rightarrow \quad 8 + 2c = 2 \\ f'(2) = g'(2) &\Rightarrow 12 + a = 12 + c \end{aligned}$$

con: $f'(x) = 3x^2 + a$ y $g'(x) = 3x^2 + c$
Finalmente resolviendo el sistema así formado se encuentra que:

$$a = c = -3, \quad b = 0$$

b) Dado que $f(x) = \ln(\frac{1}{\cos x}) = \ln 1 - \ln\cos x = -\ln\cos x$ Ahora

$$f'(x) - \frac{1}{\cos x}(-\operatorname{sen} x) = \tan x, \qquad f''(x) = \sec^2 x$$

por tanto

$$f''(x) - (f'(x))^2 = \sec^2(x) - \tan^2(x) = 1$$

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	1 pto	Impone correctamente $f(2) = g(2) = 2$.
C2	1 pto	Calcula derivadas y plantea condición sobre la derivada $f'(2) = g'(2)$.
C3	1 pto	Resuelve el sistema y concluye a, b, c correctamente.
C4	1 ptos	Utiliza correctamente la regla de la cadena y concluye $f'(x) = \tan x$.
C5	1 ptos	Calcula correctamente $f''(x) = \sec^2 x$.
C6	1 ptos	Concluye la identidad que se pide.