Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Verano del 2025

MAT1610 ⋆ Cálculo I
Interrogación 3
Solución

1. *a*) **(6 puntos)** Mediante la definición de la integral definida, calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\cdots+\sqrt{n+n})$$

b) **(6 puntos)** Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen}(\pi t)}{\sqrt{t+1}}\,dt$$

Solución.

a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\cdots+\sqrt{n+n}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}}(\sqrt{n+i})\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}\;\frac{1}{n} = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

Note que: $\Delta x = \dfrac{1}{n}$ y que $x_i = i\Delta x = \dfrac{i}{n}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen}(\pi t)}{\sqrt{t+1}}\,dt\Big(\frac{0}{0}\Big) =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi x^2)\,2x}{3x^2\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\frac{\operatorname{sen}(\pi x^2)}{\pi x^2}\,\pi\,\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{3}\cdot 1\cdot\pi\cdot\frac{0}{\sqrt{1}} = 0$$

Distribución de puntaje:

a)

- (1 punto) Por aplicar la definición de la integral definida .
- (2 punto) por relacionar el item anterior especificando: $x_i = \frac{1}{n}$ o equivalente y $\Delta x = \dfrac{1}{n}$.
- (1 punto) por descubrir $f(x) = \sqrt{1+x}$.
- (1 punto) por el cálculo correcto de la integral.
- (1 punto) Por el resultado correcto.

b)

- (1 punto) por darse cuenta de L'Hopital
- (2 puntos) por aplicar correctamente el teorema fundamental.
- (2 punto) por el cálculo del límite, ya sea por límite notable o L'Hopital nuevamente.
- (1 punto) Por el resultado correcto.

2. Calcule las siguientes integrales

   a) **(4 puntos)** $\displaystyle\int \frac{3x^2+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$

   b) **(4 puntos)** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}}\,dx$

   c) **(4 puntos)** $\displaystyle\int \tan^3 x\,dx$

   Solución

   a) $\displaystyle\int \frac{3x^2+1}{x^3-2x^2+x}\,dx = \int \frac{3x^2+1}{x(x-1)^2}\,dx$

   de donde

$$\frac{3x^2+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1}$$

   Calculando las constantes, se obtienen: $A = 1$, $B = 4$, $C = 2$

   así,

$$\int \frac{3x^2+1}{x^3-2x^2+x}\,dx = \int (\frac{1}{x} + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1})\,dx$$

$$= \ln x - \frac{4}{x-1} + 2\ln(x-1) + K$$

   b) Haciendo $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$ se obtiene

$$\int \frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}}\,dx = \int \frac{t}{e^t} 2t\,dt = 2\int t^2 e^{-t}\,dt$$

   Integrando por partes

$$u = t^2 \Rightarrow du = 2t\,dt; \quad dv = e^{-t}\,dt \Rightarrow v = -e^{-t}$$

   se tiene

$$\int t^2 e^{-t}\,dt = -t^2 e^{-t} - \int -e^{-t}(2t\,dt) = -t^2 e^{-t} + 2\int te^{-t}\,dt$$

   Nuevamente por partes

$$\mu = t \Rightarrow du = dt; dr = e^{-t}dt \Rightarrow v = -e^{-t}$$

$$\int t^2 e^{-t}dt = -t^2\epsilon^{-t} + 2\left(-t\epsilon^{-t} - \int -e^{-t}dt\right)$$

$$= -t^2\epsilon^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t} = -e^{-t}\left(t^2+2t+2\right)$$

   finalmente

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\left(-e^{-t}\left[t^2+2t+2\right]\right) + c$$

$$= -2e^{-\sqrt{x}}(x+2\sqrt{x}+2) + c$$

c)

$$\int \tan^3 x dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x} \operatorname{sen} x \, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x} \operatorname{sen} x \, dx$$

Haciendo: $t = \cos x \Rightarrow dt = -\operatorname{sen} x \, dx$, se obtiene

$$\begin{aligned} \int \tan^3 x dx &= \int \frac{1-t^2}{t^3}(-dt) = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right) dt \\ &= \ln t + \frac{1}{2t^2} + c \end{aligned}$$

finalmente

$$\int \tan^3 x dx = \ln(\cos x) + \frac{1}{2\cos^2 x} + c$$

Distribución de puntaje:

a)

- (1.5 punto) por las fracciones parciales incluye el cálculo de las constantes.
- (1.5 punto) por cada integral correcta .
- (1.0) por el resultado (0 puntos si no tiene la constante de integración)

b)

- (1.5 punto) por la sustitución o cambio de variable o equivalente
- (1.0 punto) por la primera integración por partes.
- (0.5 punto) por la segunda integración por partes.
- (1.0 punto) por el resultado (0 puntos si no tiene la constante de integración)

c)

- (2 puntos) por el cambio de variable o equivalente.
- (1 punto) por las integrales correctas
- (1.0 punto) por el resultado (0 puntos si no tiene la constante de integración)

3. *a*) **(6 puntos)** En el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ se tiene que $f(x) - \text{sen}(x) = \displaystyle\int_0^{\text{sen}(x)} \sqrt{1-t^2}\, dt$ donde f es derivable en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $f(0) = 0$. Encuentre $f(x)$.
Ayuda: Derive $f(x)$

b) **(6 puntos)** Calcular $f(0)$, si se sabe que

$$f(\pi) = 2 \text{ y que } \int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)] \operatorname{sen} x\, dx = 5$$

Solución.

a) Derivando, se obtiene

$$\begin{aligned}
&f'(x) - \cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}\cos x = |\cos x|\, \cos x, \text{ como } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\
&f'(x) = \cos x + \cos^2 x \\
&f(x) = \operatorname{sen} x + \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx + C \\
&= \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\left(x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right) + C \text{ como, } f(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \\
&f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\left(x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right)
\end{aligned}$$

b)

$$\int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)] \operatorname{sen} x\, dx = \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} x dx + \int_0^{\pi} f''(x) \operatorname{sen} x\, dx = 5$$

Aplicando por partes en la segunda inteqral

$$\begin{aligned}
u &= \operatorname{sen} x \Rightarrow du = \cos x dx \\
dv &= f''(x)dx \Rightarrow v = f'(x)
\end{aligned}$$

se sigue

$$\int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} x dx + \left(\operatorname{sen} x f'(x)|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos x f'(x)\, dx\right) = 5$$

nuevamente por partes con: $u = \cos x$ y $v = f'(x)dx$, resulta

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x f(x)\, dx - \left(\cos x f(x)|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\operatorname{sen} x f(x)\, dx\right) = 5$$

de donde, simplificando se obtiene

$$-\left(\cos \pi f(\pi) - \cos 0 f(0)\right) = -(-1(2) - f(0)) = 5$$

finalmente

$$f(0) = -3$$

Distribución de puntaje:

a)

- (2 puntos) Por la derivada correcta .
- (2 punto) por el cálculo correcto de $f(x)$.
- (1 punto) por el cálculo correcto de la constante C.
- (1 punto) Por el resultado correcto de $f(x)$.

b)

- (1 punto) por separar en dos integrales.
- (2 puntos) por aplicar por partes en la segunda integral.
- (1 punto) por el la aplicación del teorema fundamental.
- (1 punto) por aplicar por partes nuevamente.
- (1 punto) Por el resultado correcto.

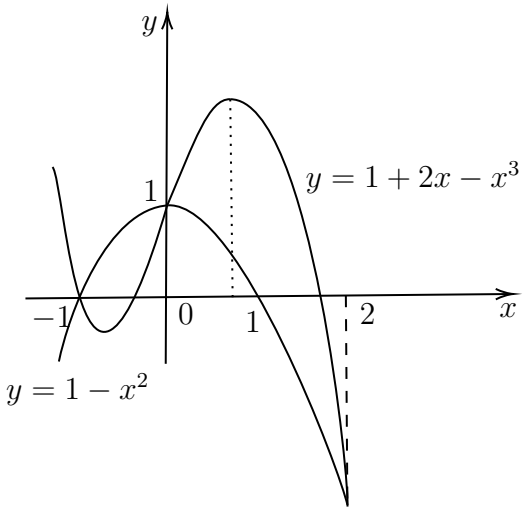
4. Considere las curvas

$$y = 1 + 2x - x^3, \quad y = 1 - x^2$$

a) **(6 puntos)** Calcule el área de la región comprendida entre las curvas.

b) **(6 puntos)** Calcule el volumen del sólido que se genera al rotar en torno al eje X, lo región plana encerrada por las curvas para $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Solución.



a) obtenemos los puntos de interseccion de las curvas $f(x) = 1 - x^2$; $\quad g(x) = 1 + 2x - x^3$, resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{l} y = 1 + 2x - x^3 \\ y = 1 - x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x = -1, x = 0, x = 2$$

$$\begin{aligned}
\text{Area} &= \int_{-1}^{2} |f(x) - g(x)| dx = \\
&= \int_{-1}^{0} \left[1 - x^2 - \left(1 + 2x - x^3\right)\right] dx + \int_{0}^{2} \left[1 + 2x - x^3 - \left(1 - x^2\right)\right] dx \\
&= \int_{-1}^{0} \left(-x^2 - 2x + x^3\right) dx + \int_{0}^{2} \left(2x + x^2 - x^3\right) dx \\
&= \left(-\frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{2} \\
&= \frac{37}{12}
\end{aligned}$$

b) Para $x \geq 0$ e $y \geq 0$,

$$\begin{aligned}
V_x &= \pi \int_0^2 g^2(x)dx - \pi \int_0^1 f^2(x)dx \\
&= \pi \int_0^2 \left(1 + 2x - x^3\right)^2 dx - \pi \int_0^1 \left(1 - x^2\right)^2 dx \\
&= \pi \int_0^2 \left(1 + 4x + 4x^2 - 2x^3 - 4x^4 + x^6\right) dx - \pi \int_0^1 \left(1 - 2x^2 + x^4\right) dx \\
&= \pi \left(x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_0^2 - \pi \left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \pi \left(1 + \frac{34}{3} - \frac{129}{5} + \frac{128}{7}\right)
\end{aligned}$$

Distribución de puntaje:

a)

- (1 puntos) Por los puntos de intersección .

- (1 punto) por el la fórmula que calcula el área de la región entre las curvas.

- (2 punto) por especificar correctamente las dos integrales que calculan el área en cuestión.

- (1 punto) Por el cálculo correcto de los integrales.

- (1 punto) Por el resultado

b)

- (3 puntos) por las dos integrales correctas que calculan el volumen en cuestión.

- (1 punto) por el cálculo de la primera integral.

- (1 punto) por el cálculo de la segunda integral.

- (1 punto) Por el resultado correcto.