Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Verano del 2025

MAT1610 ⋆ Cálculo I
Interrogación 2
Solución

1. *a*) **(6 puntos)** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en $\mathbb{R}$ tal que $f(2) = -2$, $f'(x) \geq 5$ para $x > 2$. Demuestre que $f(4) \geq 8$
   Ayuda: Aplique el T.V.M.

   b) **(6 puntos)** Sea $y = f(x)$ definida implícitamente por la ecuación

$$x^2 + y^2 = 5x$$

   Calcule: y' e y'' en el punto $(1, 2)$.

Solución.

a) Dado que f es derivable en $\mathbb{R}$ es continua en $[2, 4]$ y derivable en $(2, 4)$ por tanto se cumplen las condiciones para aplicar el T.V.M. es decir existe $x \in (2, 4)$ tal que

$$f'(x) = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{f(4) + 2}{2}$$

pero $f'(x) \geq 5$ para $x > 2$ entonces $\dfrac{f(4) + 2}{2} \geq 5 \Leftrightarrow f(4) \geq 8$

b) i) Derivando implícitamente obtenemos

$$2x + 2yy' = 5 \Leftrightarrow y' = \frac{5 - 2x}{2y}$$

de donde

$$y'(1, 2) = \frac{3}{4}$$

ii) Derivando nuevamente respecto a x la ecuación $2x + 2yy' = 5$ resulta

$$2 + 2y'y' + 2yy'' = 0 \Leftrightarrow y'' = -\frac{1 + (y')^2}{y}$$

de donde

$$y''(1, 2) = -\frac{25}{32}$$

Distribución de puntaje:

a)

- (2 puntos) por establecer las condiciones para aplicar el T.V.M.
- (2 puntos) por aplicar correctamente el T.V.M. en $(2, 4)$.
- (2 punto) por la demostración correcta de lo que se pide.

b)

- (2 puntos) por y' sin error.
- (1 punto) por el valor correcto de $y'(1,2)$.
- (2 puntos) por y'' que se muestra en la pauta o otra forma equivalente, sin error.
- (1 punto) por el valor correcto de $y''(1,2)$.

2. *a*) **(6 puntos)** Si $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$, pruebe que

$$y'' + (\tan x)y' + y\cos^2 x = 0$$

b) **(6 puntos)** Demuestre que

$$\arctan\left(\frac{1+3x}{1-3x}\right) - \arctan(3x) = \frac{\pi}{4}$$

Solución.

a)

$$y' = \cos(\operatorname{sen} x)\cos x, \qquad y'' = -\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\cos^2 x - \operatorname{sen} x\cos(\operatorname{sen} x)$$

así

$$y'' + (\tan x)y' + y\cos^2 x = -\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\cos^2 x - \operatorname{sen} x\cos(\operatorname{sen} x) + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cos(\operatorname{sen} x)\cos x + \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\cos^2 x = 0$$

b) Sea $H(x) = \arctan\left(\frac{1+3x}{1-3x}\right) - \arctan(3x)$ entonces derivando se obtiene

$$H'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+3x}{1-3x}\right)^2}\frac{3(1-3x)-(1+3x)(-3)}{(1-3x)^2} - \frac{3}{1+9x^2}$$

$$H'(x) = \frac{6}{(1-3x)^2+(1+3x)^2} - \frac{3}{1+9x^2} = \frac{6}{2+18x^2} - \frac{3}{1+9x^2}$$

$$H'(x) = \frac{3}{1+9x^2} - \frac{3}{1+9x^2} = 0$$

Dado que, $H'(x) = 0 \Rightarrow H(x) = c$.

Para determinar la constante c, evaluamos $H(x)$ en cualquier punto de su dominio, por ejemplo $x = 0$, o sea que

$H(0) = c \Leftrightarrow \arctan 1 - \arctan 0 = c \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}$, así

$$H(x) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \arctan\left(\frac{1+3x}{1-3x}\right) - \arctan(3x) = \frac{\pi}{4}$$

Distribución de puntaje:

a)

- (2 puntos) por y' sin error .
- (2 puntos) por y'' sin error.
- (2 puntos) por probar lo que se pide.

b)

- (2 puntos) por la derivada sin error de: $\arctan\left(\frac{1+3x}{1-3x}\right)$.
- (1 punto) por la derivada sin error de: $\arctan(3x)$.
- (2 puntos) por mostrar que si $H'(x) = 0 \Rightarrow H(c) = 0$
- (1 punto) por el cálculo de la constante c

3. **(12 puntos)** Grafique la función, indicando a lo menos : dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, máximos, mínimos, sentidos de concavidad y puntos de inflexión.

$$f(x) = \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

sabiendo que:

$f'(x) = \dfrac{x^2(3-x)}{(1-x)^3}, \qquad f''(x) = \dfrac{6x}{(1-x)^4}$

Solución.

Dom $= \mathbb{R} - \{1\}$.

Asíntota vertical,

Dado que

$\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} \dfrac{x^3}{(1-x)^2} = \pm\infty \Rightarrow x = 1$ es una asíntota vertical para f.

Asintota oblicua u horizontal

Sea $y = mx + n$ la asíntota en cuestión, donde

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\dfrac{x^3}{(1-x)^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{(1-x)^2} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} [\frac{x^3}{(1-x)^2} - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 - x}{1-x^2} = 2$$

por tanto

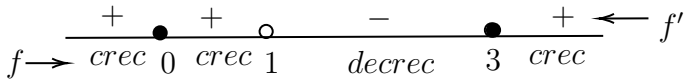
$$y = x + 2$$

es una asíntota oblicua para f.

Dado que en el cálculo de $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x}{x}$ no dio 0, entonces no tiene asíntota horizontal.

Crecimientos, decrecimientos, máx. y mín.

Dado que $f'(x) = \dfrac{x^2(3-x)}{(1-x)^3}$, los puntos críticos de f son: 0, 1, 3, entonces



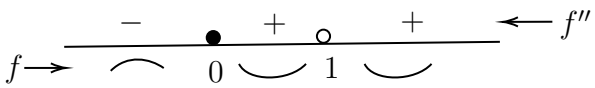
f es creciente en los intervalos, $(-\infty, 1)$, $(3, \infty)$.

f es decreciente en el intervalo, $(1, 3)$.

f tiene un mínimo local en $x = 3$ cuyo valor es $f(3) = \dfrac{27}{4}$.

Concavidades e inflexiones.

Dado que $f''(x) = \dfrac{6x}{(1-x)^4}$



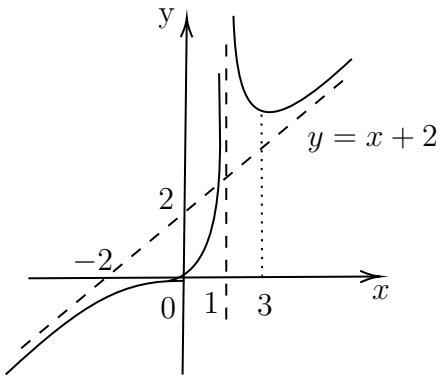
Por tanto:

f es cóncava hacia arriba en los intervalos, $(0,1)$, $(1,\infty)$.

f es cóncava hacia abajo en el intervalo, $(-\infty,0)$.

f tiene un punto de inflexión en el punto $(0,0)$,

Gráfico de f

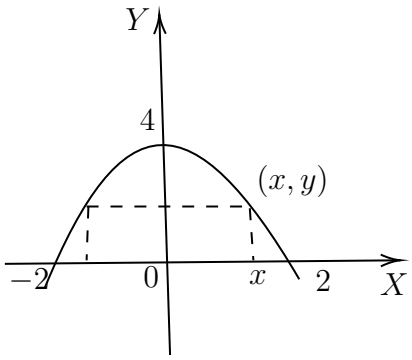


Distribución de puntaje:

- (1 punto) por el dominio.
- (1 punto) por fundamentar bien la asíntota vertical .
- (1 punto) por el fundamentar bien la inexistencia de la asíntota horizontal.
- (1 punto) por la asíntota oblicua correcta.
- (2 puntos) por los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- (1 punto) por el mínimo local
- (2 puntos) por los intervalos concavidad.
- (1 punto) por el punto de inflexión.
- (2 puntos) por el gráfico correcto.

4. *a*) **(6 puntos)** Encuentre la aproximación lineal de la función $f(x) = x\cos x$, en $a = 0$ y úsela para obtener una aproximación de $f(0{,}1)$.

b) **(6 puntos)**Determine el rectángulo de mayor área que se puede inscribir entre la parábola $y = 4 - x^2$ y el eje X,



Solución.

a) La aproximación lineal de $f(x) = x\cos x$ en $x = 0$ es

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x - 0)$$

donde $f'(0) = 0$, $f'(x) = \cos x - x\,\mathrm{sen}\,x$ entonces $f'(0) = 1$, así

$$f(x) \approx 0 + 1x = x$$

Por tanto $f(0{,}1) \approx 0{,}1$

b) De la figura el área del rectángulo de lados $2x \times y$ está dada por

$$A = 2xy,\ 0 < x < 2, 0 < y < 4$$

Dado que A es una función de 2 variables, para dejarla en una variable, usamos que el punto (x, y) está sobre la curva entonces $y = 4 - x^2$ esta condición nos permite dejar A en una sola variable, es decir

$$A(x) = xy = x(4 - x^2) = 4x - x^3$$

$A'(x) = 4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, que verifica $0 < x < 2$.

Dado que $A''(x) = -6x$ y que $A''(\dfrac{2}{\sqrt{3}}) < 0$ por lo que en el

punto crítico $A(x)$ es máxima y las dimensiones del rectángulo son: $\dfrac{4}{\sqrt{3}} \times \dfrac{8}{3}$

Distribución de puntaje:

a)

- (2 puntos) por espresar correctamente la fórmula de aproximación lineal de f en $x = 0$.
- (2 puntos) por la aproximación lineal de f en $x = 0$ dada por $f(x) \approx x$.
- (2 punto) por el valor correcto de la aproximación de $f(0{,}1)$.

b)

- (1 punto) por la función de área a máximizar en dos variables
- (1 punto) por la función de área a máximizar en una variable
- (1 punto) por la derivada de $A(x)$
- (1 punto) por el punto crítico de $A'(x)$
- (1 punto) por justificar correctamente que $A(x)$ es máxima para el punto crítico.
- (1 punto) por las dimensiones del rectángulo de mayor área.