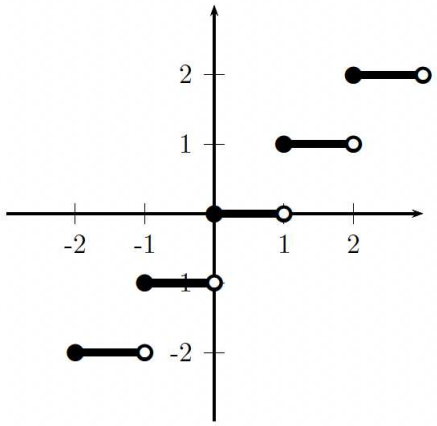
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
TAV 2025

Cálculo 1 ⋆ MAT1610

Interrogación 1

1. (a) **(6 ptos)** En la imagen se muestra la gráfica de la función **parte entera**: $[x]$.



Calcule $\lim_{x\to 2^-} \frac{[x]}{x}$ y $\lim_{x\to 2^+} \frac{[x]}{x}$ ¿Qué puede decir de la existencia de $\lim_{x\to 2} \frac{[x]}{x}$?

(b) **(6 ptos)** Calcule los siguientes límites.

(i) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2+x-2}$

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{x^2}$

Solución

(a) Calculemos los límites laterales,

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{[x]}{x} = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{[x]}{x} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2}{x} = 1$$

Por lo anterior, $\lim_{x\to 2} \frac{[x]}{x}$ ya que los límites laterales no coinciden.

(b) (i)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2+x-2} &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(x-1)(x+2)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(x+2)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-1}{x^2} &= 4\lim_{u\to 0}\frac{\cos(u)-1}{u^2}, \quad u=2x\\ &= 4\cdot\frac{-1}{2}\\ &= -2\end{aligned}$$

Evaluación.

- **C1(a)** Asignar (**2 pto**) por calcular correctamente $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{[x]}{x}$.
- **C2(a)** Asignar (**2 pto**) por calcular correctamente $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{[x]}{x}$.
- **C3(a)** Asignar (**2 pto**) por decir que $\lim_{x\to 2} \dfrac{[x]}{x}$ no existe. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumplan los criterios **C1(a)** y **C2(a)**.

- **C1(bi)** Asignar (**1 pto**) por racionalizar correctamente por $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$.
- **C2(bi)** Asignar (**2 pto**) por obtener el valor del límite esperado. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumplan los criterios **C1(bi)**.

- **C1(bii)** Asignar (**1 pto**) por hacer correctamente el cambio de variable $u = 2x$.
- **C2(bii)** Asignar (**2 pto**) por obtener el valor del límite esperado. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumplan los criterios **C1(bii)**.

2. **(10 ptos)** Determine las asíntotas horizontales y verticales de

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x-2} & x < 0 \\ \dfrac{x+1}{x^2-1} & x \geq 0 \end{cases}$$

Solución

Asíntotas verticales. Esta función tiene indefinición en $x = 1$, luego

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$$

Por lo anterior, f tiene asíntota vertical en $x = 1$.

Asíntotas horizontales. Calculemos los límites al infinito.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -\infty} f(x) &= \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x-2} \\ &= \lim_{x\to -\infty} \frac{|x|\sqrt{4+1/x+1/x^2}}{x(1-2/x)} \\ &= \lim_{x\to -\infty} \frac{-x\sqrt{4+1/x+1/x^2}}{x(1-2/x)} \\ &= -\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4+1/x+1/x^2}}{1-2/x} \\ &= -2 \end{aligned}$$

Luego, f tiene asíntota en $-\infty$ dada por $y = -2$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to \infty} f(x) &= \lim_{x\to \infty} \frac{x+1}{x^2-1} \\ &= \lim_{x\to \infty} \frac{x(1+1/x)}{x^2(1-1/x^2)} \\ &= \lim_{x\to \infty} \frac{1}{x}\frac{1+1/x}{1-1/x^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego, f tiene asíntota en ∞ dada por $y = 0$.

Evaluación.

- **C1** Asignar (**2 pto**) por calcular correctamente que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty$ o $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$.
- **C2** Asignar (**1 pto**) por escribir la ecuación de la asíntota vertical $x = 1$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumpla el criterio **C1**.
- **C3** Asignar (**3 pto**) por calcular correctamente que $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.
- **C4** Asignar (**1 pto**) por escribir la ecuación de la asíntota horizontal $y = -2$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumpla el criterio **C4**.
- **C5** Asignar (**2 pto**) por calcular correctamente que $\lim_{x\to \infty} f(x)$.
- **C6** Asignar (**1 pto**) por escribir la ecuación de la asíntota horizontal $y = 0$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumpla el criterio **C5**.

3. **(a)** **(6 ptos)** Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{4x}{x^2+1}$ en $(1,2)$. Justifique sus resultados mediante el cálculo de límites.

(b) **(6 ptos)** Calcule $f'(0)$ sabiendo que $f(x) = x^2e^x - \sin(2x)$. Justifique sus resultados mediante el cálculo de límites.

Solución

(a) La ecuación de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{4x}{1+x^2}$ en $(1,2)$, está dada por

$$y - 2 = y'(1)(x-1)$$

donde

$$\begin{aligned} y'(1) &= \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{4x}{1+x^2} - 2}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{4x-2-2x^2}{(x-1)(1+x^2)} = \lim_{x\to 1} \frac{-2(x-1)^2}{(x-1)(1+x^2)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{-2(x-1)}{(1+x^2)} = 0 \end{aligned}$$

Asi la ecuación de la recta tangente es:

$$y = 2$$

(b)

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2e^x - \operatorname{sen}(2x) - (0^2e^0 - \operatorname{sen}(2\cdot 0)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \left(xe^x - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}\cdot 2 \right) = 0\cdot 1 - 1\cdot 2 = -2 \end{aligned}$$

Evaluación.

- **C1(a)** Asignar (**1 pto**) por plantear correctamente el límite de $f'(1)$.
- **C2(a)** Asignar (**3 pto**) por calcular correctamente $f'(1)$.
- **C3(a)** Asignar (**2 pto**) por determinar correctamente la ecuación de la recta tangente. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumplan los criterios **C1(a)** y **C2(a)**.

- **C1(b)** Asignar (**1 pto**) por plantear correctamente el límite de $f'(0)$.
- **C2(b)** Asignar (**3 pto**) por calcular correctamente $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x}$.
- **C3(b)** Asignar (**2 pto**) por determinar correctamente $f'(0)$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumplan los criterios **C1(b)** y **C2(b)**.

4. (a) **(6 ptos)** Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} ax & x \leq 2 \\ x^2 - 3x + 2 + 2a|a| & x > 2 \end{cases}$$

(i) Determine los valores de a para los cuales f es continua en $x = 2$.

(ii) Determine los valores de a para los cuales f es derivable en $x = 2$.

Justifique sus resultados mediante el cálculo de límites.

(b) **(6 ptos)** Demuestre que la ecuación $x\sin(x) = 1$ tiene al menos una solución real.

SOLUCIÓN

(a) **(i)** Continuidad de $f(x)$ en $x = 2$

$f(x)$ es continua en $x = 2$ si y solo si

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 2a$$

La existencia de este límite obliga a que los límites laterales sean iguales

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} ax = 2a$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \left(x^2 - 3x + 2 + 2a|a|\right) = 2a|a|$$

entonces se debe tener que

$$2a = 2a|a|$$

esta ecuación tiene por soluciones: $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$

luego $f(x)$ es continua en $x = 2$, para:

$$a = 0,\ a = \pm 1$$

(ii) Derivabilidad de $f(x)$ en $x = 2$.

De la definición de derivada de $f(x)$ en $x = 2$ tenemos

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

la existencia de $f'(2)$ implica la existencia del limite, lo que obliga a que los límites laterales sean iguales.

$$f'_-(2) = \lim_{x\to 2} \frac{ax - 2a}{x - 2}$$

$$a = 0 \Rightarrow f'_-(2) = 0, \quad a = 1 \Rightarrow f'_-(2) = 1, \quad a = -1 \Rightarrow f'_-(2) = -1$$

ahora, calculando $f'_+(2)$ y para $a = 0, a = \pm 1$

$$f'_+(2) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x\to 2^t} (x - 1) = 1$$

Así, para:

$a = 0$, $f'_-(2) = 0 \neq 1 = f'_+(2)$ entonces no existe $f'(2)$

$a = -1$, $f'_-(2) = -1 \neq 1 = f'_+(2)$ entonces no existe $f'(2)$

$a = 1$, $f'_-(2) = 1 = f'_+(2)$ entonces $f(x)$ es derivable en $x = 2$

(b) Sea $H(x) = x\,\mathrm{sen}(x) - 1$, que es una función continua en $[0, \frac{\pi}{2}]$, por ser un producto y suma de funciones continuas y dado que

$$H(0) = -1 < 0$$
$$H(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$$

Por tanto tenemos las hipótesis del Teorema del valor intermedio en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ entonces existe $c \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que

$$H(c) = 0$$

con lo que c es una raíz de $x\,\mathrm{sen}(x) = 1$.

Evaluación.

- **C1(ai)** Asignar (**0.5 pto**) por calcular correctamente $\lim_{x\to 2^-} f(x)$.
- **C2(ai)** Asignar (**0.5 pto**) por calcular correctamente $\lim_{x\to 2^+} f(x)$.
- **C3(ai)** Asignar (**0.5 pto**) por obtener la ecuación $a = a|a|$ o una equivalente.
- **C4(ai)** Asignar (**0.5 pto**) por concluir que f es continua para $a = 0$.
- **C5(ai)** Asignar (**0.5 pto**) por concluir que f es continua para $a = 0$.
- **C6(ai)** Asignar (**0.5 pto**) por concluir que f es continua para $a = 0$.

- **C1(aii)** Asignar (**1 pto**) por probar que $f'(2)$ NO existe para $a = 0$.
- **C2(aii)** Asignar (**1 pto**) por probar que $f'(2)$ NO existe para $a = -1$.
- **C3(aii)** Asignar (**1 pto**) por probar que $f'(2) = 1$ para $a = 1$.

- **C1(b)** Asignar (**2 pto**) por justificar correctamente la continuidad de H.
- **C2(b)** Asignar (**2 pto**) por calcular correctamente y exhibir que H tiene diferente signo en los extremos del intervalo.
- **C3(b)** Asignar (**2 pto**) por concluir que existe c en el intervalo abierto tal que $H(c) = 0$, a partir del TVI o Teorema de Bolzano.

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular y/o relojes inteligente prendidos