FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Interrogación 2
MAT1610 - Cálculo I

1. Derivadas

   a) Si $f(x) = x\cos(3x\ln(x^2))$, calcule $f'(x)$.
   Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(3x\ln(x^2)) + x(\cos(3x\ln(x^2)))' \\ &= \cos(3x\ln(x^2)) - x\,\mathrm{sen}(3x\ln(x^2))(3x\ln(x^2))' \\ &= \cos(3x\ln(x^2)) - x\,\mathrm{sen}(3x\ln(x^2))(3\ln(x^2) + 3x\frac{2x}{x^2}) \\ &= \cos(3x\ln(x^2)) - x\,\mathrm{sen}(3x\ln(x^2))(3\ln(x^2) + 6) \\ &= \cos(6x\ln(x)) - 6x\,\mathrm{sen}(6x\ln(x))(\ln(x) + 1) \end{aligned}$$

   OBS: Usando la identidad $\ln(x^2) = 2\ln(x)$ al comienzo, se puede simplificar un poco el desarrollo.
   Distribución de puntaje:

   - regla del producto (5 pts).
   - derivada del coseno (5 pts).
   - regla de la cadena (5 pts).
   - derivada de ln (5 pts).

   b) Si $g(x) = \frac{e^{3x^2}-7}{x^x}$, calcule $g'(x)$.
   Solución: La derivada de x^x se puede obtener por derivación logarítmica.

$$(x^x)' = x^x(\ln(x) + 1)$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(e^{3x^2} - 7)'(x^x) - (e^{3x^2} - 7)(x^x)'}{x^{2x}} \\ &= \frac{(e^{3x^2})(3x^2)'(x^x) - (e^{3x^2} - 7)x^x(\ln(x) + 1)}{x^{2x}} \\ &= \frac{6xe^{3x^2}(x^x) - (e^{3x^2} - 7)x^x(\ln(x) + 1)}{x^{2x}} \\ &= \frac{6xe^{3x^2} - (e^{3x^2} - 7)(\ln(x) + 1)}{x^x} \end{aligned}$$

   Distribución de puntaje:

- regla del cociente (5 pts).
- derivada de exponencial (5 pts).
- regla de la cadena (5 pts).
- derivada de x^x (5 pts).

c) Si $p(x) = f(g(x) - 3)$ y $q(x) = g(xf(x))$, calcule $p'(2)$ y $q'(0)$ considerando los valores en la tabla

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
0	2	-1	5	7
1	2	3	-4	5
2	3	4	4	-2

Solución:

$$\begin{aligned} p'(2) &= f'(g(2) - 3)g'(2) \\ &= f'(4 - 3)(-2) \\ &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q'(0) &= g'(0)(0f'(0) + f(0)) \\ &= 7 \cdot 2 \\ &= 14 \end{aligned}$$

Distribución de puntaje:

- 10 puntos cada una.

2. Determine los valores de a, b, c para que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} & \text{si } x < 2 \\ bx & \text{si } x = 2 \\ ax^2 + x + c & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

sea derivable en $x = 2$ y **calcule** $f'(2)$.

Solución: Si f es derivable en $x = 2$, entonces también es continua en $x = 2$. Para ello debemos tener

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

Es decir

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{a}{x} = \frac{a}{2} = 2b$$
$$\lim_{x \to 2^+} ax^2 + x + c = 4a + 2 + c = 2b$$

Despejando, tenemos

$$a = 4b \qquad c = 2b - 4a - 2 = -14b - 2.$$

Ahora para que sea diferenciable, se debe tener

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \\
\lim_{x\to 2^-} \frac{\frac{a}{x}-2b}{x-2} &= \lim_{x\to 2^+} \frac{ax^2+x+c-2b}{x-2} \\
\lim_{x\to 2^-} \frac{4b-2bx}{x(x-2)} &= \lim_{x\to 2^+} \frac{4bx^2+x-14b-2-2b}{x-2} \\
\lim_{x\to 2^-} \frac{-2b(x-2)}{x(x-2)} &= \lim_{x\to 2^+} \frac{(4bx+8b+1)(x-2)}{x-2} \\
\lim_{x\to 2^-} -b &= \lim_{x\to 2^+} 4bx+8b+1 \\
-b &= 16b+1.
\end{aligned}$$

Finalmente concluimos que f es derivable en $x=2$ cuando

$$a=-\frac{4}{17} \qquad b=-\frac{1}{17}, \qquad c=-\frac{20}{17}$$

Con estos valores, $f'(2)=-b=\frac{1}{17}$

Distribución de puntaje:

- Planteamiento de continuidad izquierda, valor y derecha (15 pts).
- Planteamiento de límites laterales para derivada (15 pts).
- Resolución algebraica (20 pts).
- Valor final $f'(2)$ (10 pts).

OBS: Si simplemente deriva las expresiones para la función a la derecha y a la izquierda de 2, recibe 0 de los 15 puntos del segundo ítem.

3. Considere la curva dada por la ecuación $(y^2-1)(y^2-4)=x^2(x^2-4)$. Use una aproximación lineal de y como función de x cerca del punto $(2,1)$ para estimar el valor de y cuando $x=2{,}05$.

Solución: La ecuación dada es equivalente con $y^4-5y^2+4=x^4-4x^2$ Derivando obtenemos

$$4y^3\frac{dy}{dx}-10y\frac{dy}{dx}=4x^3-8x.$$

En el punto $(2,1)$:

$$4\frac{dy}{dx}-10\frac{dy}{dx}=32-16,$$

por lo que

$$\frac{dy}{dx}(2,1)=-\frac{8}{3}$$

Entonces, para $x=2{,}05$,

$$y\approx 1-\frac{8}{3}(0{,}05)=1-\frac{8}{60}=\frac{13}{15}.$$

Distribución de puntaje:

- Derivación implícita (20 pts).
- Evaluación en el punto y pendiente (20 pts).
- Aproximación lineal y cálculo numérico (20 pts).

4. Un volantín se mueve a 2m/s en dirección horizontal a 30 metros de altura por sobre el carrete al que está amarrado. ¿Con qué rapidez disminuye el ángulo entre el hilo y el suelo (horizontal) cuando se han liberado 60 metros de hilo del carrete.

   Nota: Suponga que el hilo se extiende en una línea recta desde el carrete al volantín.

   Solución: Definamos primero las variables relevantes del problema. Consideremos la longitud del hilo liberado como L (en metros), la distancia entre el carrete y el punto directamente bajo el volantín como x (en metros), el ángulo entre el hilo y la horizontal como θ (en radianes) y el tiempo transcurrido como t (en segundos).

   Las relaciones conocidas entre estas variables son

   $$x^2 + 900 = L^2 \tag{1}$$

   $$\tan(\theta) = \frac{30}{x} \tag{2}$$

   Los datos al momento en que queremos conocer $\frac{d\theta}{dt}$ son

   $$L = 60 \tag{3}$$

   $$\frac{dx}{dt} = 2 \tag{4}$$

   Derivando las relaciones que tenemos entre las variables,

   $$\sec^2(\theta)\frac{d\theta}{dt} = -\frac{30}{x^2}\frac{dx}{dt} \tag{5}$$

   Ahora estamos en condiciones de usar los datos dados para calcular cuando se han liberado 60 metros de hilo, es decir $L = 60$. De la relación pitagórica tenemos $x = 30\sqrt{3}$. Además $\theta = \frac{\pi}{6}$. Reemplazando los valores conocidos (después de derivar):

   $$\frac{4}{3}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{30}{3 \cdot 30^2} \cdot 2$$

   Despejando y simplicando:

   $$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{60}$$

   El ángulo disminuye a razón de $\frac{1}{60}/s$ (1/60 radián por segundo).

   Distribución de puntaje:

   - Planteamiento (15 pts).
   - Derivación implícita (20 pts).
   - Sustitución numérica (15 pts).
   - Resultado final simplificado (10 pts).