Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2025

Cálculo 1 ⋆ MAT1610

Interrogación 3

Nota. Sólo podrá usar los contenidos de las clases 1 a la 29 para resolver esta evaluación.

1. **(15 ptos)** Considere la función

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$$

donde sus dos primeras derivadas son:

$$f'(x) = \frac{x(2+x)}{(1+x)^2} \qquad \text{y} \qquad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

(a) Determine los intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento de f.

(b) Determine los valores de mínimo y máximo locales de f.

(c) Determine los intervalos de concavidad hacia arriba e intervalos de concavidad hacia abajo de f.

(d) Determine las asíntotas de f (horizontales, verticales y oblicuas).

(e) Esboce la gráfica de f.

Nota. Para las asíntotas oblicuas, debe diferenciar si ésta corresponde para $x \to -\infty$ o $x \to \infty$.

2. **(a)** **(6 ptos)** Use el teorema del valor medio para demostrar la desigualdad

$$\arctan(x_2) - \arctan(x_1) < x_2 - x_1, \qquad \text{para todo} \quad x_2 > x_1.$$

A partir de este resultado, deduzca que $\arctan(x) < x$, para todo $x > 0$.

(b) **(6 ptos)** Calcule los siguientes límites, justificando cada paso:

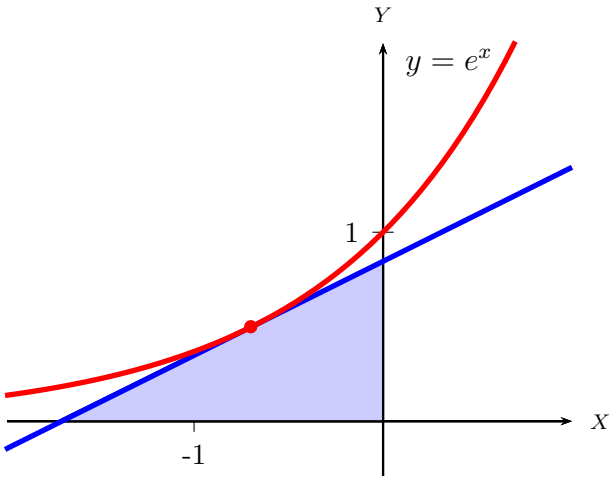
(i) $\lim_{x \to 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right)$.

(ii) $\lim_{x \to \infty} (e^x + x)^{1/x}$.

Nota. Puede usar la regla de L'Hopital para el cálculo de estos límites.

Continua...

3. (a) **(6 ptos)** Determine el área más grande que puede tener el triángulo que se forma en el segundo cuadrante, cuya hipotenusa es tangente a la curva $y = e^x$ en algún punto y sus catetos están sobre los ejes coordenados (ver imagen).



(b) **(8 ptos)** Considere el siguiente límite

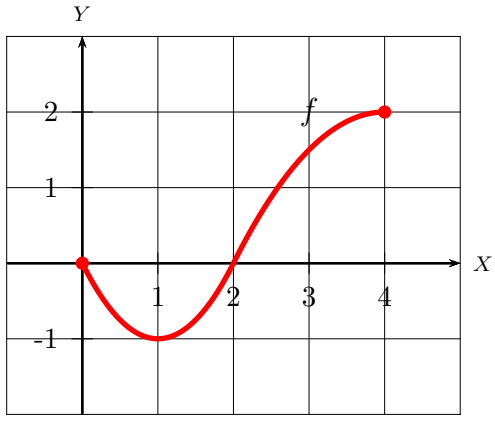
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \ldots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right)$$

Usando suma de Riemann, represente como integral y calcule su valor.

4. (a) **(8 ptos)** Calcule las siguientes integrales

(i) $\displaystyle\int \sec(x)\big(\sec(x) + \tan(x)\big)\,dx$ **(ii)** $\displaystyle\int_{-1}^{2} \big|x^2 - 1\big|\,dx$

(b) **(6 ptos)** Sea f una función continua sobre $[0, 4]$ y derivable sobre $(0, 4)$, que posee un único mínimo local en $x = 1$, como se muestra en la imagen.



Determine los intervalos de concavidad de

$$F(x) = xf(x^2) - 2\int_0^x u^2 f'(u^2)\,du$$

sobre $[-2, 2]$.

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

TIEMPO: 120 MINUTOS

SIN CONSULTAS

SIN CALCULADORA

PROHIBIDO TENER CELULAR Y/O RELOJES INTELIGENTE PRENDIDOS

Pauta de Corrección

1. (a) A partir de f' construimos una tabla de signos:

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,0)$	$(0,\infty)$
x	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x+1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$

De la tabla de deduce que f es creciente en $(-\infty,-2)$ y en $(0,\infty)$, mientras que f es decreciente en $(-2,-1)$ y en $(-1,0)$.

(b) A partir de la tabla de signos para f' se deduce que f tiene como máximo local a $f(-2)=-3$ y tiene como mínimo local a $f(0)=1$.

(c) A partir de f'' construimos una tabla de signos:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,\infty)$
2	$+$	$+$
$(x+1)^3$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$

De la tabla de deduce que f es cóncava hacia abajo en $(-\infty,-1)$, mientras que f es cóncava hacia arriba en $(-1,\infty)$.

(d)

- **Asíntota vertical.** Tiene a $x=-1$ como asíntota vertical, ya que

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \infty \qquad \boxed{\frac{1}{0^+}}$$

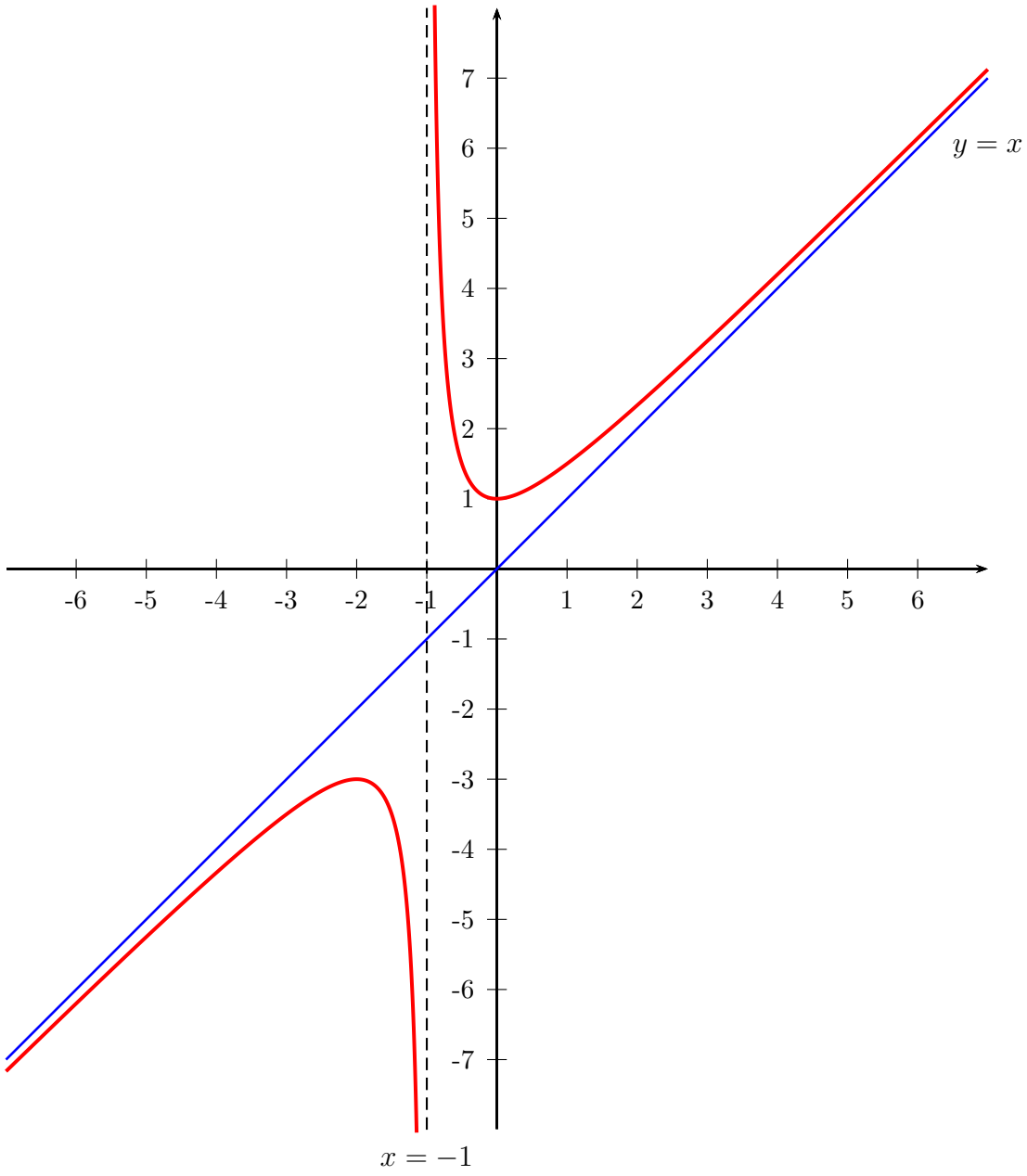
- **Asíntota oblicua.** Tiene a $y=x$ como asíntota oblicua tanto cuando $x\to-\infty$ como cuando $x\to\infty$, ya que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x+1}{x(x+1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+1/x+1/x^2}{1+1/x} = 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x+1-x(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

- **Asíntota horizontal.** No posee, ya que a ambos infinitos posee oblicua.

(e) Un esbozo de esta gráfica está dada por:



Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1(a)	**1 pto**	**Determinar** que f es creciente en $(-\infty, -2)$. Este puntaje se asignará si se construye una tabla de signos correcta que justifique su afirmación.
C2(a)	**1 pto**	**Determinar** que f es creciente en $(0, \infty)$. Este puntaje se asignará si se construye una tabla de signos correcta que justifique su afirmación.
C3(a)	**1 pto**	**Determinar** que f es decreciente en $(-2, -1)$. Este puntaje se asignará si se construye una tabla de signos correcta que justifique su afirmación.
C4(a)	**1 pto**	**Determinar** que f es decreciente en $(-1, 0)$. Este puntaje se asignará si se construye una tabla de signos correcta que justifique su afirmación.
C1(b)	**1 pto**	**Determinar** que $f(-2) = -3$ es valor de máximo local. Este puntaje se asignará si se construye una tabla de signos correcta que justifique su afirmación y se haya calculado el valor de $f(-2)$.
C2(b)	**1 pto**	**Determinar** que $f(0) = 1$ es valor de mínimo local. Este puntaje se asignará si se construye una tabla de signos correcta que justifique su afirmación y se haya calculado el valor de $f(0)$.
C1(c)	**1 pto**	**Determinar** que f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -1)$. Este puntaje se asignará si se construye una tabla de signos correcta que justifique su afirmación.
C2(c)	**1 pto**	**Determinar** que f es cóncava hacia arriba en $(-1, \infty)$. Este puntaje se asignará si se construye una tabla de signos correcta que justifique su afirmación.
C1(d)	**1 pto**	**Determinar** que f tiene asíntota vertical en $x = -1$. Este puntaje se asignará si se calcula (correctamente) alguno de los siguientes límites: $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ o $\lim_{x \to -1^+} f(x)$.
C3(d)	**1 pto**	**Determinar** que f tiene asíntota oblicua a $y = x$ en $-\infty$. Este puntaje se asignará si se calcula (correctamente) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $\lim_{x \to -\infty}(f(x) - x)$.
C3(d)	**1 pto**	**Determinar** que f tiene asíntota oblicua a $y = x$ en ∞. Este puntaje se asignará si se calcula (correctamente) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $\lim_{x \to \infty}(f(x) - x)$.
C1(e)	**1 pto**	**Esbozar**, sobre $(-\infty, -1)$, la gráfica de una curva cóncava hacia abajo cuyo máximo (local) sea negativo.
C2(e)	**1 pto**	**Esbozar**, sobre $(-\infty, -1)$, la gráfica de una curva cóncava hacia arriba cuyo mínimo (local) sea positivo.
C3(e)	**1 pto**	**Esbozar** el comportamiento asíntotico de f en $x = -1$, cuya gráfica va a $-\infty$ por la izquierda de $x = -1$ y va a ∞ por la derecha de $x = -1$. Este puntaje se asignará si se traza la gráfica de la asíntota.
C4(e)	**1 pto**	**Esbozar** el comportamiento asíntotico de f cuando $x \to \pm\infty$, cuya gráfica se acerca a la recta $y = x$, como en la gráfica propuesta en esta pauta. Este puntaje se asignará si se traza la gráfica de la asíntota.

2. (a) La función $\arctan(x)$ es continua en $[x_1, x_2]$ y derivable en (x_1, x_2), y cumple las condiciones del T.V.M.

Entonces existe ξ en (x_1, x_2) tal que

$$f'(\xi) = \frac{\arctan x_2 - \arctan x_1}{x_2 - x_1} \quad \Leftrightarrow \quad \arctan x_2 - \arctan x_1 = \frac{1}{1+\xi^2}(x_2 - x_1)$$

donde $x_1 < \xi < x_2$, y como

$$0 < \frac{1}{1+\xi^2} < 1 \quad \text{y} \quad x_2 - x_1 > 0,$$

entonces

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 < x_2 - x_1, \quad x_2 > x_1$$

En particular, poniendo $x_1 = 0$ y $x_2 = x$, obtenemos

$$\arctan x < x \ (x > 0)$$

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**2 pto**	**Establecer** que $\frac{\arctan(x_2) - \arctan(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1}{1+\xi^2}$ para algún ξ en el intervalo (x_1, x_2).
C2	**2 pto**	**Determinar** que $\frac{1}{1+\xi^2} < 1$. ó **Determinar** que $\frac{1}{1+\xi^2} \leq 1$.
C3	**1 pto**	**Concluir** que $\arctan x_2 - \arctan x_1 < x_2 - x_1$, $x_2 > x_1$ mencionando el TVM. Este puntaje se asignará si se cumplen los criterios **C1** y **C2** ó **Concluir** que $\arctan x_2 - \arctan x_1 \leq x_2 - x_1$, $x_2 > x_1$ mencionando el TVM. Este puntaje se asignará si se cumplen los criterios **C1** y **C2**
C4	**1 pto**	**Deducir** que $\arctan x < x$, $x > 0$, habiendo evaluado $x_2 = x$ y $x_1 = 0$. Este puntaje se asignará si se cumple el criterio **C3**. ó **Deducir** que $\arctan x \leq x$, $x > 0$, habiendo evaluado $x_2 = x$ y $x_1 = 0$. Este puntaje se asignará si se cumple el criterio **C3**.

(b) **(i)** El límite es:

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right).$$

Llevamos a un denominador común:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}.$$

Como el numerador y el denominador tienden a 0, tenemos la indeterminación $0/0$. Aplicamos L'Hôpital derivando numerador y denominador:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(x\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}.$$

Nuevamente es una indeterminación $0/0$, aplicamos L'Hôpital otra vez:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(-x\sin x)'}{(\sin x+x\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-x\cos x}{\cos x+\cos x-x\sin x}.$$

Evaluamos en $x=0$:

$$\frac{-\sin 0-0\cos 0}{2\cos 0-0\sin 0}=\frac{0}{2}=0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)=0.$$

(ii) El límite a evaluar es:

$$\lim_{x\to\infty}(e^x+x)^{1/x}.$$

Tomamos logaritmo natural:

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e^x+x)}{x}.$$

Es una forma ∞/∞, aplicamos L'Hôpital derivando numerador y denominador:

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e^x+1}{e^x+x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+1}{e^x+x}.$$

Dividimos numerador y denominador por e^x:

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{1+e^{-x}}{1+xe^{-x}}.$$

Cuando $x\to\infty$, $e^{-x}\to 0$, por lo que el límite resulta en:

$$L=\frac{1+0}{1+0}=1.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to\infty}(e^x+x)^{1/x}=e^L=e^1=e.$$

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1(i)	**1 pto**	**Determinar** una expresión simplificada en forma de fracción, por ejemplo: $\frac{x\cos x - \sin x}{x \sin x}$.
C2(i)	**1 pto**	**Aplicar** la regla de L'Hopital al cociente obtenido. Este criterio se asignará si se cumple el criterio **C1(i)**.
C3(i)	**1 pto**	**Calcular** el límite resultante, obteniendo por resultado 0. Este criterio se asignará si se cumple el criterio **C2(i)**. **Nota.** Si el estudiante obtuvo el valor esperando mediante un procedimiento correcto, asignar todos los criterios.
C1(ii)	**1 pto**	**Aplicar** logaritmo natural y obtener una expresión del tipo: $\frac{\ln(e^x + x)}{x}$ o equivalente.
C2(ii)	**1 pto**	**Aplicar** la regla de L'Hopital al cociente obtenido. Este criterio se asignará si se cumple el criterio **C1(ii)**.
C3(ii)	**1 pto**	**Calcular** el límite pedido, obteniendo por resultado e. Este criterio se asignará si se cumple el criterio **C2(ii)**. **Nota.** Si el estudiante obtuvo el valor esperando mediante un procedimiento correcto, asignar todos los criterios.

3. (a) Notamos primero que una ecuación de la recta tangente al gráfico de $y = e^x$ en el punto (a, e^a) está dada por $y = e^a(x - a) + e^a$, o bien, $y = e^a(x - a + 1)$.

Veamos ahora que la intersección de esta recta con el eje Y se produce en el punto $(0, e^a(1 - a))$, mientras que la interesección de la recta con el eje X se produce en el punto $(a - 1, 0)$.

De esta manera, el área de cualquier triángulo que corta al segundo cuadrante y cuya hipotenusa es tangente a la curva $y = e^x$ en algún punto (de la forma (a, e^a))), se puede modelar mediante la función:

$$A(a) = \frac{|a - 1| \cdot |e^a(1 - a)|}{2} = \frac{e^a}{2}(a - 1)^2 \quad , \quad a < 1$$

Obs: La restricción $a < 1$ aparece por la gemetría del problema pues, en caso contrario, la recta no cortará al segundo cuadrante.

Buscamos entonces el máximo de la funcián $A(a)$. Derivando tenemos que:

$$A'(a) = \frac{e^a}{2} \cdot (a - 1)^2 + \frac{e^a}{2} \cdot 2(a - 1) = \frac{e^a}{2}(a - 1)(a + 1)$$

De lo anterior, $A'(a) = 0$ si $a = 1$ o si $a = -1$, pero tenemos que $a < 1$, por lo que el único número crítico a considerar es $a = -1$. Notamos que $A'(a) > 0$ para x en $(-\infty, -1)$ y que $A'(a) < 0$ para x en $(-1, 1)$, por lo cual, concluimos que en $x = -1$ se produce el máximo global de la función $A(a)$. Finalmente, la mayor área posible, de un triángulo que corta al segundo cuadrante y cuya hipotenusa es tangente a la curva $y = e^x$ en algún punto, está dada por $A(-1) = 2e^{-1}$.

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**1 pto**	**Determinar** una ecuación para la recta tangente al gráfico de $y = e^x$ en el punto (a, e^a).
C2	**1 pto**	**Determinar** las intersecciones de la recta con los ejes coordenados.
C3	**1 pto**	**Determinar** una función que represente el área del triángulo, es decir: $A(x) = \frac{e^x}{2}(x - 1)^2$, o una expresión equivalente.
C4	**1 pto**	**Determinar** los números críticos de la función.
C5	**1 pto**	**Determinar** la naturaleza del número crítico. (mínimo o máximo)
C6	**1 pto**	**Determinar** el área máxima.

(b) El límite pedido se puede representar usando suma de Riemann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \ldots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$$

De este modo, el límite pedido corresponde a la suma de Riemann con partición $x_k = \dfrac{k}{n}$, $k = 0, \ldots, n$, y función $f(x) = \sqrt{x}$. De este modo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \ldots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right) = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \left.\frac{x^{3/2}}{3/2}\right|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**1 pto**	**Identificar** que la integral parte en $x = 0$.
C2	**1 pto**	**Identificar** que la integral termina en $x = 1$.
C3	**2 pto**	**Identificar** la función que se debe integrar: $f(x) = \sqrt{x}$.
C4	**2 pto**	**Conocer** una antiderivada para $\sqrt{x}$.
C5	**2 pto**	**Calcular** el valor de la integral, obteniendo 2/3.

4. (a) **(i)** Usamos las propiedades de la integral para separar en dos integrales:

$$\int \sec(x)\big(\sec(x)+\tan(x)\big)\,dx = \int \sec^2(x)\,dx + \int \tan(x)\sec(x)\,dx = \tan(x)+\sec(x)+C$$

(ii) La función $f(x)=x^2-1$ es negativa en $(-1,1)$ y positiva en $(1,2)$, de este modo,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} \big|x^2-1\big|\,dx &= -\int_{-1}^{1}(x^2-1)\,dx + \int_{1}^{2}(x^2-1)\,dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_{1}^{-1} + \left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_{1}^{2} \\ &= \frac{4}{3}+\frac{4}{3} = \frac{8}{3}\end{aligned}$$

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1(i)	**1 pto**	**Representar** la integral como suma de dos integrales: $\int \sec^2(x)\,dx + \int \tan(x)\sec(x)\,dx$
C2(i)	**0.5 pto**	**Conocer** una antiderivada de $\sec^2(x)$.
C3(i)	**0.5 pto**	**Conocer** una antiderivada de $\tan(x)\sec(x)$.
C4(i)	**1 pto**	**Calcular** la integral pedida, incluyendo la constante C.
C1(ii)	**2 pto**	**Representar** la integral en la forma $-\int_{-1}^{1}(x^2-1)\,dx + \int_{1}^{2}(x^2-1)\,dx$
C2(ii)	**0.5 pto**	**Conocer** una antiderivada de 1.
C3(ii)	**0.5 pto**	**Conocer** una antiderivada de x^2.
C4(ii)	**2 pto**	**Calcular** la integral pedida, obteniendo como resultado 8/3.

(b) Los intervalos de concavidad de F dependen del signo de $F''(x)$ sobre el intervalo $(-2, 2)$.

En nuestro caso,

$$\begin{aligned} F(x) &= xf(x^2) - 2\int_0^x u^2 f'(u^2)\, du \\ F'(x) &= f(x^2) \\ F''(x) &= 2xf'(x^2) \end{aligned}$$

Sabemos que $f'(u) > 0$ si y sólo si $f(u)$ es creciente. De este modo,

- $f'(u) > 0$ si y sólo si $u \in (1, 4)$.
- $f'(u) < 0$ si y sólo si $u \in (0, 1)$.

Haciendo una tabla de signos para F'' tendremos

	$(-2,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$
$2x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f'(x^2)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$F''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Por lo tanto, F es cóncava hacia arriba en $(-1, 0)$ y en $(1, 2)$, mientras que F cóncava hacia abajo en $(-2, -1)$ y en $(0, 1)$,

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**1 pto**	**Calcular** $F'(x) = f(x^2)$.
C2	**1 pto**	**Calcular** $F''(x) = 2xf'(x^2)$.
C3	**1 pto**	**Determinar** que $f'(x^2) > 0$ sobre los intervalos $(-2, -1)$ y $(1, 2)$.
C4	**1 pto**	**Determinar** que $f'(x^2) < 0$ sobre los intervalos $(-1, 0)$ y $(0, 1)$.
C5	**1 pto**	**Determinar** que F es cóncava hacia abajo en $(-2, -1)$ y en $(0, 1)$. Este criterio se asignará si se cumplen los criterios **C2**, **C3** y **C4**.
C6	**1 pto**	**Determinar** que F es cóncava hacia arriba en $(-1, 0)$ y en $(1, 2)$. Este criterio se asignará si se cumplen los criterios **C2**, **C3** y **C4**.