Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2025

Cálculo 1 ⋆ MAT1610

Interrogación 2

Nota. Sólo podrá usar los contenidos de las clases 1 a la 19 para resolver esta evaluación. Por lo que no está permitido usar la *regla de L'Hopital*.

1. (a) **(6 ptos)** La función $s(t) = \sqrt{2t+1} - 1$ representa la posición de una partícula que se mueve en línea recta. Si las unidades de medida de s y t son metros y segundos, respectivamente, determine la velocidad de la partícula en el segundo $t = 4$.

Nota. Justifique sus afirmaciones mediante el cálculo de límites.

(b) **(9 ptos)** Determine los valores de a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \leq 1 \\ ax^2 + b & x > 1, \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 1$.

Nota. Justifique sus afirmaciones mediante el cálculo de límites.

2. (a) **(6 ptos)** Calcule las siguientes derivadas.

(i) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sin(x)}{1-\cos(x)}\right)$ **(ii)** $\dfrac{d}{dx}\sqrt{\ln\left(1+2^x\right)}$

(b) **(6 ptos)** Calcule $f'(0)$, sabiendo que

$$f(x) = \Big(\cos(2x)\Big)^{x^3+x}$$

3. (a) **(6 ptos)** Utilice la derivación implícita para encontrar una ecuación para la recta tangente a la curva

$$x^2 + xy + y^2 = 3$$

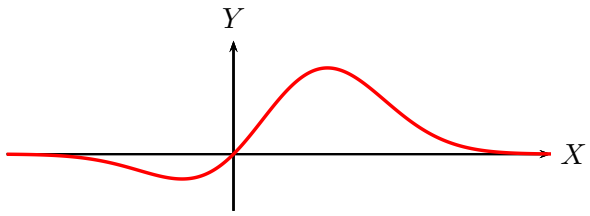
en el punto $(1, 1)$.

(b) **(8 ptos)** Utilice la aproximación lineal para estimar el valor de

$$e^{\frac{1}{100}} \cos\left(\frac{1}{1\,000\,000}\right).$$

Continua...

4. (a) **(8 ptos)** En la imagen se presenta la gráfica de $f(x) = x\, e^{6x-8x^2}$.



(i) Determine los números críticos de f

(ii) A partir de la gráfica, clasifique los números críticos de f en mínimo local, máximo local o ninguno..

(b) **(6 ptos)** Suponga que f es una función derivable tal que

$$f(g(x)) = (3x+1)^{10} \quad \text{y} \quad f'(x) = 1 + \Big(f(x)\Big)^3$$

Determine $g'(x)$.

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular y/o relojes inteligente prendidos

Pauta de Corrección

1. (a) Sabemos que la velocidad instantánea de un objeto que se mueve en línea recta con ecuación de movimiento $s(t)$ está dada por $v(t) = s'(t)$. En este caso, tenemos que:

$$\begin{aligned} v(4) = s'(4) &= \lim_{h\to 0} \frac{s(4+h) - s(4)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{9+2h} - 3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h(\sqrt{9+2h}+3)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2}{\sqrt{9+2h}+3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la velocidad de la partícula en $t = 4$ es de $\frac{1}{3}$ metros por segundo.

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**1 pto**	**Identificar** que se debe calcular $s'(4)$.
C2	**1 pto**	**Determinar** una expresión para $\frac{s(4+h)-s(4)}{h}$, por ejemplo $\frac{\sqrt{9+2h}-3}{h}$, si calcula el límite cuando $h \to 0$. ó **Determinar** una expresión para $\frac{s(t)-s(4)}{t-4}$, por ejemplo $\frac{\sqrt{2t+1}-3}{t-4}$, si calcula el límite cuando $t \to 4$.
C3	**1 pto**	**Reconocer** el factor por el cual se debe racionalizar: $\left(\sqrt{9+2h}+3\right)$ cuando $h \to 0$. ó **Reconocer** el factor por el cual se debe racionalizar: $\left(\sqrt{2t+1}+3\right)$ cuando $t \to 4$.
C4	**2 ptos**	**Calcular** correctamente el valor del límite, es decir, $v(4) = \frac{1}{3}$. Este puntaje se asignará hayan obtenido $v = v(t)$ mediante cálculo de límite o fórmulas conocidas para la derivada.
C5	**1 pto**	**Determinar** la velocidad pedida, incluyendo unidades de medida (m/s). Este puntaje se asignará si se cumple el criterio **C4**.

(b) Para que f sea continua en $x = 1$ se debe cumplir que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

donde

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} x^2 - x = 0\\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} ax^2 + b = a + b\\ f(1) &= 0\end{aligned}$$

A partir de la condición de continuidad en $x = 1$ para f tendremos que $a + b = 0$.

Similarmente, para que f sea derivable en $x = 1$ se debe cumplir que

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

y existan. Calculando ambos límites, tendremos

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} (1 + h) = 1\\ \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{2ah + ah^2}{h} \lim_{h\to 0^+} (2a + ah) = 2a\end{aligned}$$

A partir de la condición de derivada en $x = 1$ para f tendremos que $2a = 1$.

Por lo anterior, dadas las condiciones de $a+b = 0$ y $2a = 1$, podemos concluir que $a = 1/2$ y $b = -1/2$ para que f sea continua y derivable en $x = 1$.

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**1 pto**	**Determinar** que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$.
C2	**1 pto**	**Determinar** que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = a + b$.
C3	**1 pto**	**Determinar** que $f(1) = 0$.
C4	**1 pto**	**Concluir** la ecuación $a + b = 0$. Este criterio se asignará si se cumplen los criterios **C1** y **C2**.
C5	**1.5 pto**	**Determinar** que $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 1$.
C6	**1.5 pto**	**Determinar** que $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2a$.
C7	**1 pto**	**Determinar** que $a = 1/2$. Este criterio se asignará si se cumplen los criterios **C4** y **C5**.
C8	**1 pto**	**Determinar** que $b = -1/2$. Este criterio se asignará si se cumplen los criterios **C2** y **C6**.

2. (a) **(i)** Usaremos la ley de cociente para el cálculo de esta derivada.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}\right) &= \frac{\cos(x)(1-\cos(x)) - \sin(x)(\sin(x))}{(1-\cos(x))^2} \\ &= \frac{\cos(x) - \cos^2(x) - \sin^2(x)}{(1-\cos(x))^2} \\ &= \frac{\cos(x)-1}{(1-\cos(x))^2} \\ &= \frac{1}{\cos(x)-1}\end{aligned}$$

(ii) Usaremos la regla de la cadena para el cálculo de esta derivada.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sqrt{\ln(1+2^x))} &= \frac{1}{2\sqrt{\ln(1+2^x)}} \cdot \frac{d}{dx}\ln(1+2^x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\ln(1+2^x)}} \cdot \frac{1}{1+2^x} \cdot \frac{d}{dx}(1+2^x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\ln(1+2^x)}} \cdot \frac{1}{1+2^x} \cdot 2^x \ln(2)\end{aligned}$$

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1(i)	**0.5 pto**	**Conocer** que $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$.
C2(i)	**0.5 pto**	**Conocer** que $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$.
C3(i)	**1.5 pto**	**Calcular** la derivada, usando regla del cociente, obteniendo $\frac{\cos(x)-\cos^2(x)-\sin^2(x)}{(1-\cos(x))^2}$ o una expresión equivalente, sin necesidad de simplificar.
C4(i)	**0.5 pto**	**Calcular** $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}\right)$, usando la regla del cociente, obteniendo expresión (correcta) en términos del seno y coseno, por ejemplo $\frac{\cos(x)-1}{(1-\cos(x))^2}$ o $\frac{1}{\cos(x)-1}$, o una expresión equivalente.
C1(ii)	**0.5 pto**	**Conocer** que la derivada de $\sqrt{\cdot}$ es $\frac{1}{2\sqrt{\cdot}}$ en el contexto de la regla de la cadena.
C2(ii)	**0.5 pto**	**Conocer** que la derivada de $\ln(\,\cdot\,)$ es $\frac{1}{(\,\cdot\,)}$ en el contexto de la regla de la cadena.
C3(ii)	**1 pto**	**Conocer** que la derivada de 2^x es $2^x \ln(x)$.
C3(ii)	**1 pto**	**Calcular** $\frac{d}{dx}\sqrt{\ln(1+2^x)}$, obteniendo como resultado $\frac{1}{2\sqrt{\ln(1+2^x)}} \cdot \frac{1}{1+2^x} \cdot 2^x \ln(2)$ o una expresión equivalente.

(b) Alternativa 1. Usamos la representación

$$f(x) = e^{(x^3+x)\ln\left(\cos(2x)\right)}$$

Luego, derivamos usando regla de la cadena y ley del producto

$$\frac{d}{dx}f(x) = f(x)\left((3x^2+1)\ln\left(\cos(2x)\right) - (x^3+x)\frac{2\sin(2x)}{\cos(2x)}\right)$$

Alternativa 2. Aplicamos logaritmo obteniendo

$$\ln(f(x)) = (x^3+x)\ln\left(\cos(2x)\right)$$

Luego, derivamos usando regla de la cadena y ley del producto

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (3x^2+1)\ln\left(\cos(2x)\right) - (x^3+x)\frac{2\sin(2x)}{\cos(2x)}$$

Finalmente, como $f(0) = 1^0 = 1$ entonces

$$f'(0) = f(0)\left((3\cdot 0^2+1)\cdot\ln(\cos(2\cdot 0)) - (0^3+0)\frac{2\sin(2\cdot 0)}{\cos(2\cdot 0)}\right) = 1\cdot 0 = 0$$

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**1 pto**	**Representar** $f(x) = e^{(x^3+x)\ln\left(\cos(2x)\right)}$ o **Representar** $\ln(f(x)) = (x^3+x)\ln\left(\cos(2x)\right)$
C2	**1 pto**	**Conocer** que la derivada de $\ln(\,\cdot\,)$ es $\frac{1}{(\,\cdot\,)}$ en el contexto de la regla de la cadena.
C3	**2 pto**	**Calcular** la derivada de $(x^3+x)\ln\left(\cos(2x)\right)$.
C4	**1 pto**	**Calcular** $f(0)$.
C5	**1 pto**	**Calcular** $f'(0)$. Este criterio se asignará si se cumplan todos los criterios anteriores.

3. (a) Aplicando derivación implícita para $y = y(x)$ tendremos que

$$2x + y + xy' + 2yy' = 0.$$

De esta ecuación podemos despejar y', obteniendo

$$y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}.$$

Ahora, si $x = 1$ e $y(1) = 1$ entonces

$$y'(1) = -\frac{2(1) + y(1)}{(1) + 2y(1)} = -\frac{2(1) + 1}{1 + 2(1)} = -1.$$

De modo que una ecuación para la recta tangente en el punto $(1, 1)$ es

$$y - 1 = -1(x - 1).$$

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**2 pto**	**Calcular** la derivada implícita de la ecuación obteniendo $2x + y + xy' + 2yy' = 0$ o una ecuación equivalente.
C2	**2 pto**	**Calcular** $y'(1)$. Este puntaje se aplicará si se cumple el criterio **C1**. Si el estudiante equivocó al derivar la ecuación, pero obtiene que $y' = \frac{ax + by}{cx + dy}$ con $c \neq 0$ y $d \neq 0$, asignar **(1 pto)**.
C3	**2 pto**	**Determinar** una ecuación para la recta tangente a la curva en el punto $(1, 1)$. Este puntaje se aplicará si se cumplen todos los criterios anteriores. Si el estudiante equivocó al derivar la ecuación, pero obtiene que $y' = \frac{ax + by}{cx + dy}$ con $c \neq 0$ y $d \neq 0$, asignar **(1 pto)**.

(b) Calculamos la aproximación lineal de

$$f(x) := \mathrm{e}^x \cos\left(x^3\right)$$

en $x = 0$. La derivada de $f(x)$ es

$$f'(x) \;=\; \mathrm{e}^x \left(\cos\left(x^3\right) - 3x^2 \sin\left(x^3\right)\right) \;.$$

Por lo tanto tenemos que $f(0) = 1$ y $f'(0) = 1$. Entonces la aproximación lineal de $f(x)$ es

$$L(x) \;=\; 1 + x \;.$$

Por lo tanto

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{100}} \cos\left(\frac{1}{1000000}\right) \;\sim\; 1 + \frac{1}{100} \;=\; 1,01 \;.$$

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**2 pto**	**Determinar** una función a la que se aplique la aproximación lineal, por ejemplo $f(x) = \mathrm{e}^x \cos\left(x^3\right)$. Este puntaje se aplicará siempre que la función definida permita llegar a la aproximación esperada.
C2	**1 pto**	**Conocer** que $\frac{d}{dx} e^x = e^x$.
C3	**1 pto**	**Calcular** $f'(x)$, obteniendo como resultado $\mathrm{e}^x \left(\cos\left(x^3\right) - 3x^2 \sin\left(x^3\right)\right)$ o una expresión equivalente.
C4	**1 pto**	**Calcular** $f(0) = 1$.
C5	**1 pto**	**Calcular** $f'(0) = 1$. Este puntaje se asignará si se cumple el criterio **C3**.
C6	**1 pto**	**Determinar** una expresión para $L(x)$, por ejemplo $L(x) = 1 + x$ o una expresión equivalente.
C7	**1 pto**	**Calcular** $L(1/100)$.

4. (a) (i) Para determinar los números críticos de f procederemos a determinar su primera derivada, es decir

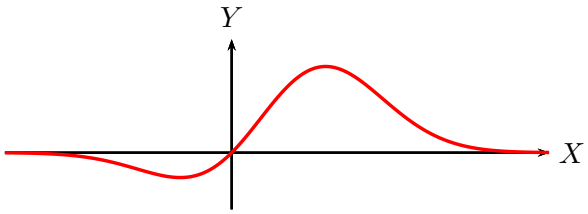
$$f'(x) = e^{6x-8x^2} + x(6-16x)e^{6x-8x^2} = (-16x^2+6x+1)e^{6x-8x^2}$$

Dado que la expresión que define a f' no tiene indefiniciones, los números críticos de f corresponden a los ceros de f'. Los valores que resuelven la ecuación $f'(x) = 0$ satisfacen:

$$-16x^2+6x+1=0 \qquad \text{o} \qquad \underbrace{16x^2-6x-1}_{(2x-1)(8x+1)} = 0$$

cuyas raíces son $x = 1/2$ y $x = -1/8$.

(ii) A partir de la gráfica de f se puede deducir que tiene un mínimo local en $x = -1/8$, y que tiene un máximo local en $x = 1/2$,



Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1(i)	**3 pto**	**Calcular** $f'(x)$, obteniendo como resultado $(-16x^2+6x+1)e^{6x-8x^2}$ o una expresión equivalente. Si el estudiante equivoca al calcular la derivada obteniendo $f'(x) = (ax^2+bx+c)e^{6x-8x^2}$, asignar **(1 pto)** siempre y cuando la ecuación $ax^2+bx+c=0$ tenga dos raíces reales de signo contrario.
C2(i)	**1 pto**	**Calcular** la raíz negativa de la ecuación $ax^2+bx+c=0$. Este puntaje se asignará si se cumple total o parcialmente el criterio **C1(i)**.
C3(i)	**1 pto**	**Calcular** la raíz positiva de la ecuación $ax^2+bx+c=0$. Este puntaje se asignará si se cumple total o parcialmente el criterio **C1(i)**.
C1(ii)	**1.5 pto**	**Concluir** f tiene un mínimo local en la raíz negativa. Este puntaje se asignará si se cumple el criterio **C2(i)**.
C2(ii)	**1.5 pto**	**Concluir** f tiene un máximo local en la raíz positiva. Este puntaje se asignará si se cumple el criterio **C3(i)**.

(b) Derivando la igualdad $f(g(x)) = (3x+1)^{10}$, obtenemos, por regla de la cadena que

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 30(3x+1)^9. \tag{1}$$

Del enunciado tenemos que

$$f'(g(x)) = 1 + \Big(f(g(x))\Big)^3 = 1 + \Big((3x+1)^{10}\Big)^3 = 1 + (3x+1)^{30}.$$

Reemplazando esta información en la igualdad ecuación (1) tendremos que

$$g'(x) = \frac{30(3x+1)^9}{f'(g(x))} = \frac{30(3x+1)^9}{1+(3x+1)^{30}}.$$

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**1.5 pto**	**Conocer** que la derivada de $(\,\cdot\,)^{10}$ es $10(\,\cdot\,)^9$ en el contexto de la regla de la cadena.
C2	**1.5 pto**	**Calcular** la derivada de $f(g(x))$, obteniendo $30(3x+1)^9$ o una expresión equivalente.
C3	**2 pto**	**Determinar** una expresión para $f'(g(x))$, por ejemplo $1+(3x+1)^{30}$ o una expresión equivalente.
C4	**1 pto**	**Determinar** una expresión para $g'(x)$, por ejemplo $\frac{30(3x+1)^9}{1+(3x+1)^{30}}$ o una expresión equivalente. Este puntaje se asignará si se cumplen todos los criterios anteriores.