Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2025

Cálculo 1 ⋆ MAT1610

Interrogación 1

Nota. Sólo podrá usar los contenidos de las clases 1 a la 9 para resolver esta evaluación. Por lo que no está permitido usar la *regla de L'Hopital*.

1. (a) **(6 ptos)** Considere la siguiente función:

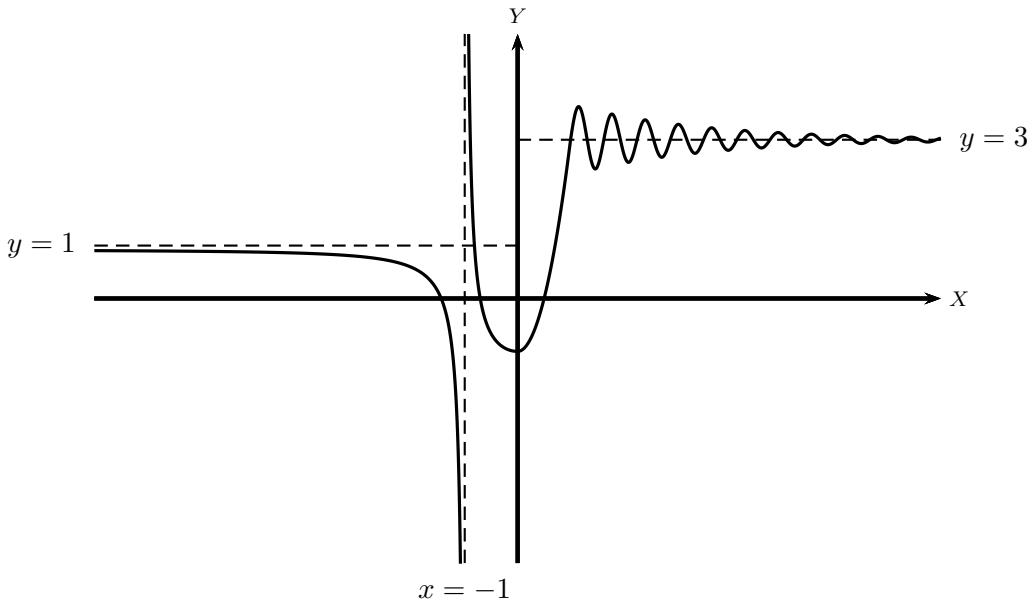
$$f(x) = \begin{cases} 1+x & x < -1, \\ x^2 & -1 \leq x \leq 1, \\ 2-x & x > 1. \end{cases}$$

Esboce su gráfica, y a partir de ella deduzca si los límites $\lim_{x\to -1} f(x)$ y $\lim_{x\to 1} f(x)$ existen. En caso que el límite exista deduzca su valor. En caso que el límite no exista, justifique su afirmación.

(b) **(9 ptos)** Determine, en caso de existir, el valor de los siguientes límites. Justifique su respuesta.

(i) $\lim_{x\to 2} \dfrac{|x|-2}{x^2-4}$ **(ii)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\sin(2x)}{\big(\sin(3x)\big)^2}$ **(iii)** $\lim_{x\to 1} \arccos\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$

2. (a) **(6 ptos)** En la imagen se muestran la gráfica de f.



Determine las ecuaciones de las asíntotas horizontales de $h(x) = \dfrac{1-f(-x)}{1+f(x)}$.

(b) **(8 ptos)** Determine las ecuaciones de las asíntotas verticales de la función

$$f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+3}$$

Continua...

3. (a) **(6 ptos)** Demuestre que la ecuación $x = 2\cos(x)$ tiene al menos una raíz real.

(b) **(8 ptos)** Determine los números reales a y b para que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b\right) = 0$$

4. (a) **(8 ptos)** Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 6 - x^2 & \text{si} \quad x \leq a \\ x & \text{si} \quad x > a \end{cases}$$

Determine todos los números reales a para los cuales la función es continua en $x = a$.

(b) **(6 ptos)** Sabemos que para todo $x > 0$ se cumple que

$$\boxed{x^0 = 1} \qquad \boxed{0^x = 0}$$

Entonces, ¿cuánto vale 0^0?. Para intentar responder esta *paradoja*, calcule

$$\lim_{x\to 0^+} x^x$$

Sugerencia. Puede usar la desigualdad

$$-\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \ln(x) \leq (x-1), \quad 0 < x < 1.$$

Además, se recuerda que $a = e^{\ln(a)}$.

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

Tiempo: 120 minutos

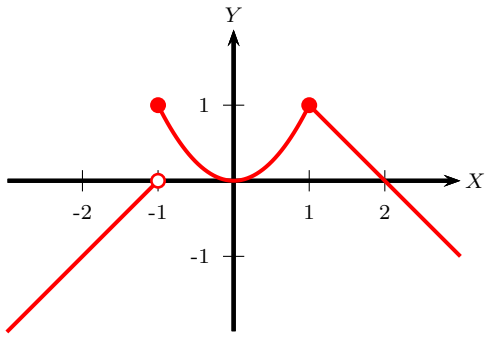
Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular y/o relojes inteligente prendidos

Pauta de Corrección

1. (a) La gráfica de la función a tramos es:



- **Límite en $\mathbf{x = -1}$.** A partir de la gráfica se deduce que

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$$

  Por lo tanto el límite no existe, ya que los límites laterales son diferentes.
- **Límite en $\mathbf{x = 1}$.** A partir de la gráfica se deduce que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**1 pto**	**Esbozar** la gráfica de f para $x < 1$, incluyendo el punto extremo de coordenadas $(-1, 0)$ sin colorear su centro.
C2	**0.75 pto**	**Esbozar** la gráfica de f para $-1 \leq x \leq 1$.
C3	**0.75 pto**	**Esbozar** la gráfica de f para $x > 1$.
C4	**0.75 pto**	**Deducir** a partir de la gráfica que $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 0$.
C5	**0.75 pto**	**Deducir** a partir de la gráfica que $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$.
C6	**0.75 pto**	**Concluir** que $\lim_{x\to -1} f(x)$, justificando que los límites laterales son diferentes. Este puntaje se asignará si se cumplen los criterios **C4** y **C5**.
C7	**1.25 pto**	**Deducir** a partir de la gráfica que $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.

(b) **(i)** Dado que $x \to 2$, podemos suponer que $x > 0$. De este modo,

$$\lim_{x\to 2} \frac{|x|-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

(ii) Para $x \neq 0$ se tiene que

$$\frac{x\sin(2x)}{(\sin(3x))^2} = \frac{2}{9}\frac{\sin(2x)}{2x}\left(\frac{3x}{\sin(3x)}\right)^2$$

Entonces, recordando el valor del límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(qx)}{qx} = 1 \qquad \text{para todo } q \neq 0,$$

podemos aplicar las leyes de los límites para deducir que

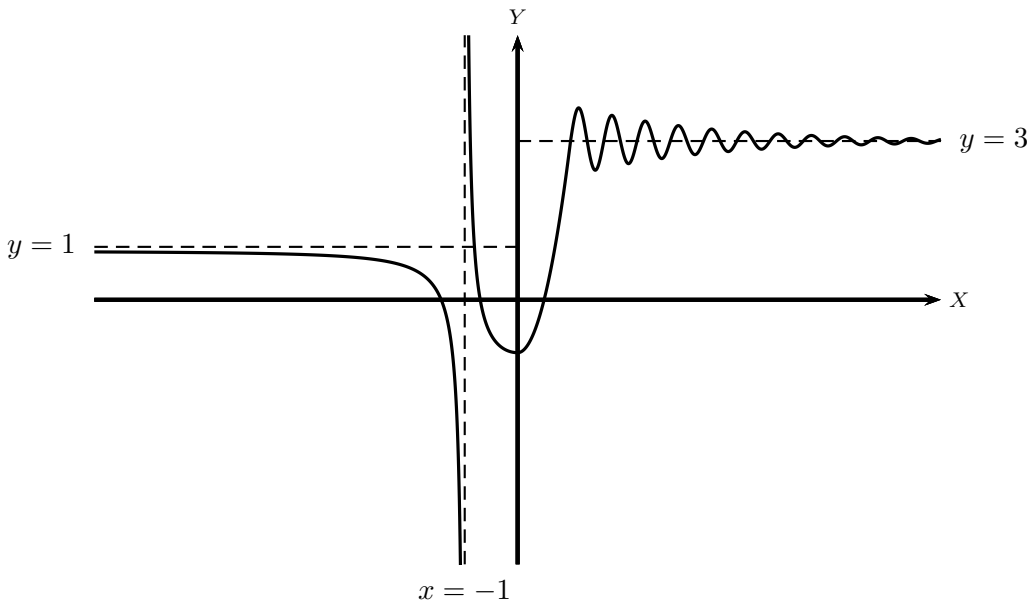
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(2x)}{(\sin(3x))^2} = \frac{2}{9}$$

(iii) Por propiedades de las funciones continuas,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) &= \operatorname{arc\,cos}\left(\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) \\
&= \operatorname{arc\,cos}\left(\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})}\right) \\
&= \operatorname{arc\,cos}\left(\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right) \\
&= \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1(i)	**1 pto**	**Identificar** que $\|x\| = x$, independiente si x está a la izquierda o a la derecha de $x = 2$.
C2(i)	**1 pto**	**Calcular** una expresión simplificada, obteniendo $\frac{1}{x+2}$, independiente si x está a la izquierda o a la derecha de $x = 2$.
C3(i)	**1 pto**	**Calcular** el valor del límite. Este puntaje se asignará si se cumplen los criterios **C1(i)** y **C2(i)**.
C1(ii)	**1 pto**	**Conocer** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x} = 1$ o $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x} = 2$. Este criterio se aplica si el estudiante escribe el límite mencionado o lo calcula mediante un cambio de variable.
C2(ii)	**1 pto**	**Conocer** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x} = 1$, $\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin(3x)} = 1$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x} = 3$, $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(3x)} = \frac{1}{3}$. Este criterio se aplica si el estudiante escribe el límite mencionado o lo calcula mediante un cambio de variable.
C3(ii)	**1 pto**	**Calcular** el valor del límite pedido. Este puntaje se asignará si se cumplen los criterios **C1(ii)** y **C2(ii)**
C1(iii)	**1 pto**	**Conocer** la propiedad que permite intercambiar el orden entre una función continua y el límite: $\lim_{x\to a} g(fx) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$.
C2(iii)	**1 pto**	**Calcular** una expresión para $\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$ que permita calcular el límite. Esta puede ser $\frac{1}{1+\sqrt{x}}$.
C3(iii)	**1 pto**	**Calcular** el valor del límite pedido. Este puntaje se asignará si se cumplen los criterios **C1(iii)** y **C2(iii)**

2. (a) A partir de la gráfica de f



Determine las ecuaciones de las asíntotas horizontales de $h(x) =$.

podemos deducir que

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-f(-x)}{1+f(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-3}{1+1} = -1$$
$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-f(-x)}{1+f(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-1}{1+3} = 0$$

De este modo, h tiene a $y = -1$ como asíntota horizontal en $-\infty$ y tiene a $y = 0$ como asíntota horizontal en ∞.

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**2 pto**	**Determinar** $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -1$
C2	**2 pto**	**Determinar** $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$
C3	**1 pto**	**Concluir** que $y = -1$ es una asíntota para f. Este puntaje se asignará si se cumple el criterio **C1**.
C4	**1 pto**	**Concluir** que $y = 0$ es una asíntota para f. Este puntaje se asignará si se cumple el criterio **C2**.

(b) Se trata de encontrar los límites infinitos. El denominador es $(x-1)(x-3)$, que se anula exactamente en $x=1$ y en $x=3$. Analicemos los límites en estos valores.

- $\mathbf{x=1}$.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-3} = 0$$

- $\mathbf{x=3}$.

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x-1}{x-3} = \infty$$

Luego, f tiene asíntota vertical en $x=3$.

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**2 pto**	**Representar** la fórmula que representa a f en alguna de las siguientes formas: $\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-3)}$ o $\frac{x-1}{x-3}$.
C2	**2 pto**	**Calcular** $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$.
C3	**2 pto**	**Calcular** alguno de los siguientes límites: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$ o $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \infty$
C4	**1 pto**	**Deducir** que f tiene asíntota vertical en $x=3$. Este puntaje se asignará si se cumple el criterio **C3**. **Obs.** Este puntaje se asigna por decir que hay asíntota en $x=3$, lo que no implica que el estudiante escriba que $x=3$ es la ecuación de la asíntota.
C5	**1 pto**	**Determinar** la ecuación de la asíntota vertical de f ($x=3$). Este puntaje se asignará si se cumple el criterio **C3**. **Obs.** Este puntaje se asigna NO por decir que hay asíntota en $x=3$, sino por decir que $x=3$ es (la ecuación de) la asíntota. Si se asigna este criterio se debe asignar el criterio **C5**.

3. (a) Definimos la la función $h(x) = x - 2\cos(x)$, sobre el intervalo $[0, 3]$.

- **Hipótesis 1**. Podemos afirmar que h es continua sobre cualquier intervalo cerrado $[0, 3]$, ya que es resta de dos funciones continuas en todo $\mathbb{R}$.
- **Hipótesis 2**. Además, $h(0) = -2 < 0$ y $h(3) = 3 - 2\cos(x) > 1$,

De esta forma, h satisfacen las hipótesis del Teorema del Valor Intermedio. Por lo tanto existe $c \in [0, 3]$ tal que $h(c) = 0$ lo que es equivalente a que $c = 2\cos(c)$.

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**1 pto**	**Construir** la función h, incluyendo un intervalo dominio.
C2	**1 pto**	**Argumentar** por qué h es continua en su intervalo dominio.
C3	**2 pto**	**Probar** que h toma signos distintos en los bordes del intervalo escogido.
C4	**1 pto**	**Concluir** que h se anula en algún número al interior del intervalo, justificando esta afirmación a partir del TVI o el Teorema de Bolzano.
C5	**1 pto**	**Concluir** que la ecuación propuesta tiene una raíz.

(b) Podemos notar que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}=0$$

Para que el límite de la derecha exista debe ocurrir que $1-a=0$, ya que en caso contrario el límite sería infinito. Para esta condición ($a=1$), el límite quedará dado por:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{-(1+b)x+1-b}{x+1}&=0\\ \lim_{x\to\infty}\frac{-(1+b)+\dfrac{1-b}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}&=0\\ -(1+b)&=0\end{aligned}$$

De esta última igualdad se concluye que $b=-1$.

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**2 pto**	**Representar** $\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b$ como una fracción. Por ejemplo: $\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}$.
C2	**2 pto**	**Concluir** que $a=1$. Este puntaje se asignará si se cumple el criterio **C1**.
C3	**2 pto**	**Calcular** alguno de los siguientes límites: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-x\right)$ o $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-x-b\right)$.
C4	**2 pto**	**Determinar** el valor de b. Este puntaje se asignará si se cumple el criterio **C3**.

4. (a) Para que f sea continua en $x = a$ se debe cumplir que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \qquad \Leftrightarrow \qquad 6 - a^2 = a = 6 - a^2$$

obteniendo la ecuación $6 - a^2 = a$, que tiene por solución $a = -3$ y $a = 2$. Luego, f es continua en $x = a$, siempre y cuando $a = -3$ o $a = 2$.

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**1 pto**	**Calcular** $\lim_{x \to a^-} f(x)$.
C2	**1 pto**	**Calcular** $\lim_{x \to a^+} f(x)$.
C3	**1 pto**	**Calcular** $f(a)$.
C4	**2 pto**	**Determiar** la ecuación $6 - a^2 = a$ o una equivalente. Si el estudiante establece esta ecuación, se considera que el estudiante merece los puntajes asociados a los criterios **C1** y **C2**.
C5	**2 pto**	**Calcular** las soluciones de la ecuación $6 - a^2 = a$, obteniendo por resultado $a = -3$ y $a = 2$.
C6	**1 pto**	**Deducir** que f es continua en $x = a$, siempre y cuando $a = -3$ o $a = 2$. Esta deducción debe estar escrita de forma explícita en el desarrollo del estudiante, para asignar el puntaje de este criterio.

(b) Usando la propiedad $a = e^{\ln(a)}$, para cualquier $a > 0$, tendremos

$$x^x = (e^{\ln(x)})^x = e^{x\ln(x)}.$$

Sabiendo que la *función exponencial* es continua, podemos afirmar que

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(x)} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)}$$

De este modo, el problema se transforma en calcular $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)$. Usando la sugerencia, para $0 < x < 1$, tendremos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \ln(x) \leq (x-1) \qquad & \Big/ \cdot x \\ -\sqrt{x} \leq x\ln(x) \leq x(x-1) \qquad & \Big/ \lim_{x\to 0^+} \\ \underbrace{-\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}}_{0} \leq \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) \leq & \underbrace{\lim_{x\to 0^+} x(x-1)}_{0} \end{aligned}$$

Finalmente, usando el teorema del sandwich, podemos concluir que

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$$

y, por tanto,

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)} = e^0 = 1$$

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**1 pto**	**Representar** x^x como $e^{x\ln(x)}$.
C2	**1 pto**	**Identificar** el nuevo límite a calcular: $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)$.
C3	**2 pto**	**Determinar** la desigualdad $-\sqrt{x} \leq x\ln(x) \leq x(x-1)$
C4	**1 pto**	**Calcular** $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)$ usando el teorema del sándwich. Este puntaje se asignará si se cumple el criterio **C3**.
C5	**1 pto**	**Concluir** que $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$. Este puntaje se asignará si se cumple el criterio **C4**.