Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2025

Cálculo 1 ⋆ MAT1610

Examen

1. **(10 ptos)** Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} c\,x^2 - x & x < 1 \\ x^3 - c^2\,x & x \geq 1 \end{cases}$$

(a) Determine los valores de c para los cuales f es continua en $x = 1$.

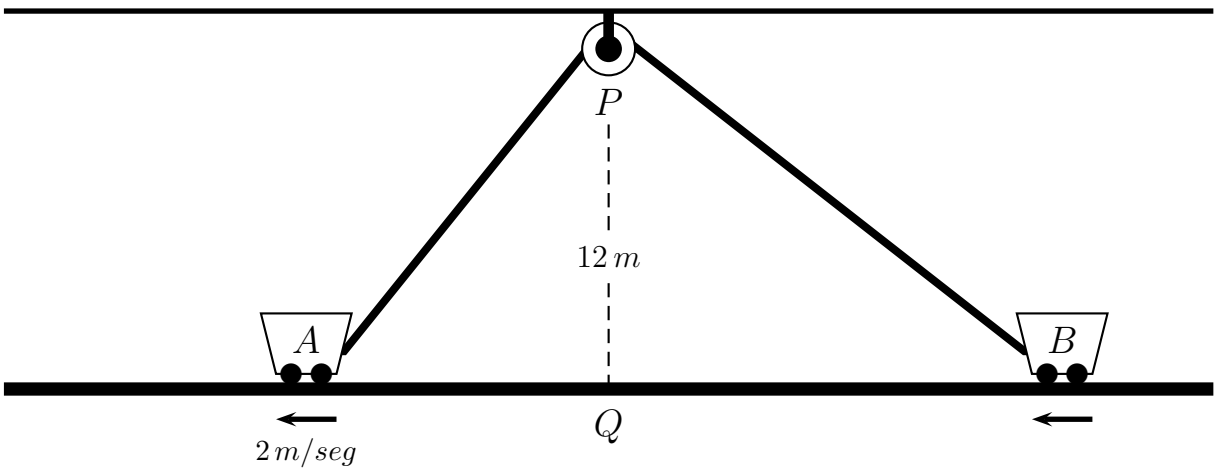
(b) ¿Existen valores de c para los cuales f admita derivada en $x = 1$?

Nota. Justifique sus afirmaciones mediante el cálculo de límites.

2. **(a)** **(6 ptos)** Calcule $y''(0)$ sabiendo que

$$y + \sin(y) = x^2, \quad y(0) = 0$$

(b) **(8 ptos)** Dos carros A y B están conectados por medio de una soga de 33 metros de longitud que pasa por una polea P (ver la imagen). El punto Q está en el suelo a 12 metros directamente abajo de P y entre los carros. Se remolca el carro A, apartándolo del punto Q, a una rapidez de $2\,m/seg$. ¿Qué tan rápido se mueve el carro B hacia Q en el instante en que el carro A está a 5 metros de Q?



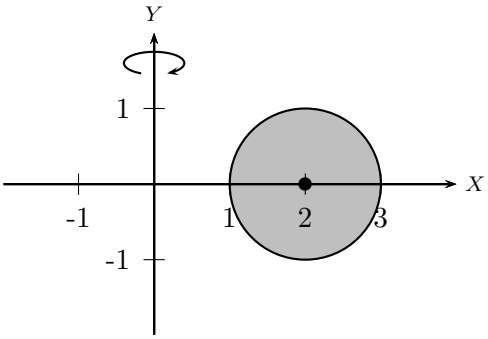
Continua...

3. **(18 ptos)** Calcule las siguientes integrales.

(a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$ **(b)** $\displaystyle\int_0^1 x\arctan(x)\,dx$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}dx$

4. **(a)** **(6 ptos)** Calcule el área de la región acotada y delimitada por las curvas $x^2 = 2y$ e $y - x = 4$.

(b) **(8 ptos)** En la imagen se muestra la gráfica de la circunferencia de ecuación $(x-2)^2 + y^2 = 1$, y $\mathcal{R}$ la región que ella encierra.



Calcule el volumen del sólido que resulta al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje Y.

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

Tiempo: 140 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular y/o relojes inteligente prendidos

Pauta de Corrección

1. (a) Para que f sea continua en $x = 1$ se debe cumplir que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

donde

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} c\,x^2 - x = c - 1\\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} x^3 - c^2\,x = 1 - c^2\\ f(1) &= 1 - c^2\end{aligned}$$

De lo anterior se debe cumplir que $c - 1 = 1 - c^2$, ecuación que tiene por solución $c = -2$ y $c = 1$. Para estos valores de c la función f es continua en $x = 1$.

(b) Para que f admita derivada en $x = 1$ se debe cumplir que f sea continua en $x = 1$, lo que se cumple cuando $c = -2$ y $c = 1$.

- **Analizar derivada para $c = -2$.** Para que f sea derivable en $x = 1$ se debe cumplir que

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

y existan. Calculando ambos límites, tendremos

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= -5\\ \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= -1\end{aligned}$$

Como los límites laterales son diferentes, se deduce que f no admite derivada en $x = 1$, para $c = -2$.

- **Analizar derivada para $c = 1$.** Para que f sea derivable en $x = 1$ se debe cumplir que

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

y existan. Calculando ambos límites, tendremos

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= 1\\ \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= 2\end{aligned}$$

Como los límites laterales son diferentes, se deduce que f no admite derivada en $x = 1$, para $c = 1$.

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1(a)	**1 pto**	**Determinar** que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = c - 1$.
C2(a)	**1 pto**	**Determinar** que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1 - c^2$.
C3(a)	**1 pto**	**Determinar** que $f(1) = 1 - c^2$.
C4(a)	**0.5 pto**	**Concluir** que $c = -2$. Este criterio se asignará si se cumplen los criterios **C1(a)** y **C2(a)**.
C5(a)	**0.5 pto**	**Concluir** que $c = 1$. Este criterio se asignará si se cumplen los criterios **C1(a)** y **C2(a)**.
C1(b)	**1 pto**	**Determinar** que $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = -3$, para $c = -2$
C2(b)	**1 pto**	**Determinar** que $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = -1$, para $c = -2$
C3(b)	**1 pto**	**Deducir** que f no admite derivada en $x = 1$, para $c = -2$. Este criterio se asignará si se cumplen los criterios **C1(b)** y **C2(b)**.
C4(b)	**1 pto**	**Determinar** que $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = 1$, para $c = 1$
C5(b)	**1 pto**	**Determinar** que $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2$, para $c = 1$
C6(b)	**1 pto**	**Deducir** que f no admite derivada en $x = 1$, para $c = 1$. Este criterio se asignará si se cumplen los criterios **C4(b)** y **C5(b)**.

2. (a) Usando derivación implícita tendremos

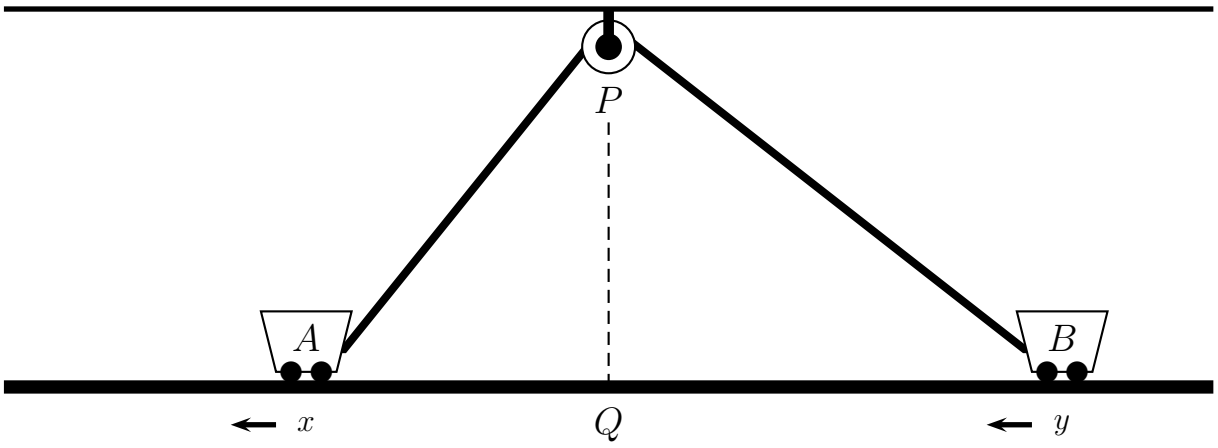
$$y' + \cos(y)y' = 2x \quad \Rightarrow \quad y'(0)\underbrace{\Big(1 + \cos(y(0))\Big)}_{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(0) = 0$$

Volviendo a derivar de forma implícita,

$$y'' - \sin(y)(y')^2 + \cos(y)y'' = 2 \quad \Rightarrow \quad y''(0) - \underbrace{\sin(y(0))(y'(0))^2}_{0} + \underbrace{\cos(y(0))}_{1} y''(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad y''(0) = 1$$

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**1.5 pto**	**Calcular** la primera derivada implícita para y, por ejemplo: $y' + \cos(y)y' = 2x$.
C2	**1.5 pto**	**Determinar** el valor de $y'(0) = 0$. Este criterio se aplicará si se cumple el criterio **C1**.
C3	**1.5 pto**	**Calcular** la segunda derivada implícita para y, por ejemplo: $y'' - \sin(y)(y')^2 + \cos(y)y'' = 2$. Este criterio se aplicará si se cumple el criterio **C1**.
C4	**1.5 pto**	**Determinar** el valor de $y''(0) = 0$. Este criterio se aplicará si se cumple el criterio **C3**.

(b) Consideramos el punto Q como cero, $x = x(t)$ la posición del carro A e $y = y(t)$ la posición del carro B.



Usando el teorema de pitágoras podremos establecer las siguientes relación:

$$\sqrt{x^2+144}+\sqrt{y^2+144}=33 \quad \Rightarrow \quad \frac{xx'}{\sqrt{x^2+144}}+\frac{yy'}{\sqrt{y^2+144}}=0$$

Por el teorema de pitágoras, para $x=-5$, la medida de la cuerda que une el carro A con el punto P es

$$\sqrt{x^2+12^2}=13$$

Luego, la longitud de la cuerda entre el punto P y el carro A es $33-13$. Por el teorema de pitágoras tendremos

$$y^2+12^2=(33-13)^2 \quad \Rightarrow \quad y=16$$

Por lo anterior,

$$\frac{(-5)(-2)}{13}+\frac{16y'}{20}=0 \quad \Rightarrow \quad y'=-\frac{10\cdot 20}{13\cdot 16}=-\frac{25}{26}$$

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**2 pto**	**Determinar** determinar una relación entre las variables x e y, por ejemplo: $\sqrt{x^2+144}+\sqrt{y^2+144}=33$.
C2	**2 pto**	**Determinar** una ecuación que relaciona x, x', y e y', por ejemplo: $\frac{xx'}{\sqrt{x^2+144}}+\frac{yy'}{\sqrt{y^2+144}}=0$.
C3	**1.5 pto**	**Calcular** AP cuando $AQ=5$, es decir $AP=13$.
C4	**1.5 pto**	**Calcular** el valor de y cuando $AQ=5$, es decir $y=16$.
C5	**1 pto**	**Calcular** $y'=-25/26$.

3. **(a)** Haciendo el cambio de variable $u = 2\sin(t)$ tendremos,

$$\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{8\sin^2(t)\cos(t)}{2|\cos(t)|}dt = 4\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2t)}{2}dt = \pi$$

(b) Haciendo integración por partes tendremos,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\arctan(x)\,dx &= \frac{x^2}{2}\arctan(x)\bigg|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx\right) \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1 - \arctan(x)\Big|_0^1\right) \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(c) Usaremos fracciones parciales,

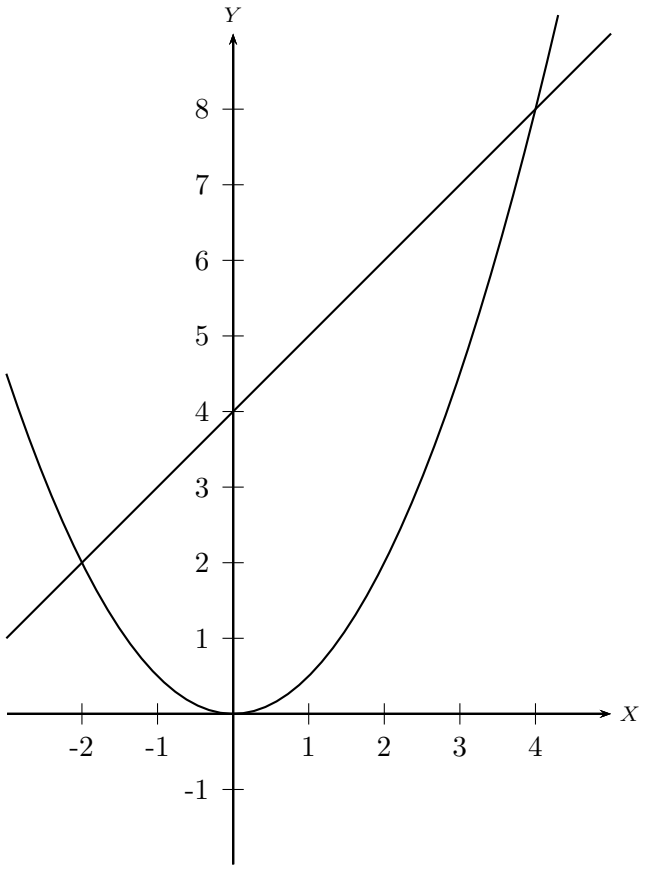
$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A+B)x^2 + (B+C)x + (A+C)}{x+1}$$

De lo anterior obtendremos el sistema $A+B=0$, $B+C=0$ y $A+C=1$, cuya solución es $A=1/2$, $B=-1/2$ y $C=1/2$. De este modo,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln(|x+1|) - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan(x) + C\end{aligned}$$

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1(a)	**1 pto**	**Determinar** el cambio de variable a realizar: $u = 2\sin(t)$ o $u = 2\cos(t)$
C2(a)	**1 pto**	**Determinar** la integral a calcular luego del cambio de variable, incluyendo intervalos de integración y función integrando, ejemplo: $\int_0^{\pi/2} \frac{8\sin^2(t)\cos(t)}{2\lvert\cos(t)\rvert} dt$ o una expresión equivalente (según el cambio de variable que haya realizado: $u = 2\sin(t)$ o $u = 2\cos(t)$).
C3(a)	**1 pto**	**Representar** $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$ o $\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$, dependiendo del cambio de variable que haya realizado: $u = 2\sin(t)$ o $u = 2\cos(t)$.
C4(a)	**2 pto**	**Calcular** el valor de la integral pedida, obteniendo como resultado π. Este puntaje se aplicará si se cumplen los criterios **C1(a)**, **C2(a)** y **C3(a)**.
C1(b)	**2 pto**	**Determinar** una expresión equivalente para la integral usando la técnica de integración por partes con $v'(x) = x$ y $u(x) = \arctan(x)$.
C2(b)	**1 pto**	**Calcular** correctamente $x^2\arctan(x)\Big\rvert_0^1 = \frac{\pi}{4}$.
C3(b)	**2 pto**	**Calcular** correctamente $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = 1 - \frac{\pi}{4}$.
C4(b)	**1 pto**	**Calcular** correctamente el valor de la integral pedida: $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.
C1(c)	**1 pto**	**Representar** $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$.
C2(c)	**1 pto**	**Determinar** el valor de A.
C3(c)	**1 pto**	**Determinar** el valor de B.
C4(c)	**1 pto**	**Determinar** el valor de C.
C5(c)	**1 pto**	**Calcular** correctamente $\int \frac{dx}{x+1}$.
C6(c)	**1 pto**	**Calcular** correctamente $\int \frac{x}{x^2+1}\, dx$.
C7(c)	**1 pto**	**Calcular** correctamente $\int \frac{dx}{x^2+1}$.

4. (a) En la imagen se muestra la gráfica de la región.



Para determinar los puntos de intersección igualamos las ecuaciones en la variable y, es decir

$$\frac{x^2}{2} = x + 4 \quad \Rightarrow \quad x = -2, x = 4$$

Luego, el área pedida está dada por

$$\int_{-2}^{4} \left((x+4) - \frac{x^2}{2} \right) dx = 18$$

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1(a)	**1 pto**	**Determinar** la ecuación $x^2/2 = x + 4$ o una equivalente.
C2(a)	**2 pto**	**Determinar** los intervalos de integración: $x = -2$ y $x = 4$. Este puntaje se asignará si se cumple el criterio **C1(a)**.
C3(a)	**1 pto**	**Representar** el área como la integral $\int_{-2}^{4} \left((x+4) - \frac{x^2}{2} \right) dx$ o una equivalente. Este puntaje se asignará si se cumple el criterio **C2(a)**.
C4(a)	**2 pto**	**Calcular** el valor del área pedida. Este puntaje se asignará si se cumple el criterio **C3(a)**.

(b) La curva que define la parte superior de la circunferencia está dada por $y = \sqrt{1-(x-2)^2}$. Luego, el volumen pedido está dado por

$$\begin{aligned} 2\int_1^3 2\pi\, x\sqrt{1-(x-2)^2}\,dx &= 4\pi\int_{-1}^1 (u+2)\sqrt{1-u^2}\,du,\ x=u+2 \\ &= 4\pi\underbrace{\int_{-1}^1 u\sqrt{1-u^2}\,du}_{0\text{ (impar)}} + 8\pi\underbrace{\int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2}\,du}_{\pi/2\text{ (área semi-circulo)}} \\ &= 4\pi^2 \end{aligned}$$

Criterio de evaluación		
Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**1 pto**	**Identificar** la curva o función que se quiere rotar: $y = \sqrt{1-(x-2)^2}$.
C2	**1 pto**	**Identificar** el intervalo de integración.
C3	**2 pto**	**Determinar** una expresión equivalente para la integral usando el cambio de variable $u = x-2$, es decir: $\int_{-1}^1 (u+2)\sqrt{1-u^2}\,du$
C4	**1.5 pto**	**Calcular** $\int_{-1}^1 u\sqrt{1-u^2}\,du = 0$.
C5	**1.5 pto**	**Calcular** $\int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2}\,du = \frac{\pi}{2}$.
C6	**1 pto**	**Determinar** el valor del volumen pedido. Este puntaje se asignará si hay un desarrollo que justifica que resultado obtenido.