Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2024

Cálculo 1 ⋆ MAT1610

Interrogación 3

1. Pregunta 1

Solución

(a) A partir de f' construimos una tabla de signos:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$-2x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$3(1-x^2)^{2/3}$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$

De la tabla de deduce que f es creciente en $(-\infty,-1)$ y en $(-1,0)$, mientras que f es decreciente en $(0,1)$ y en $(1,\infty)$.

(b) A partir de la tabla de signos para f' se deduce que f tiene un único valor extremo local en $x=0$, el que corresponde a un máximo local. Por lo tanto, f tiene un como máximo local a $f(0)=1$.

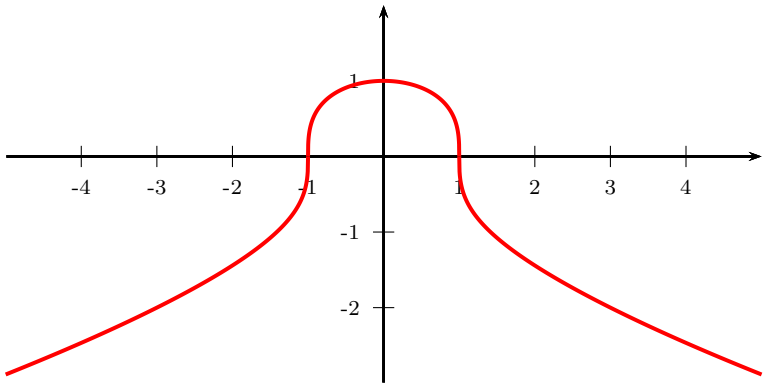
(c) A partir de f'' construimos una tabla de signos:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$-2(3+x^2)$	$-$	$-$	$-$
$9(1-x^2)^{5/3}$	$-$	$+$	$-$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$

De la tabla de deduce que f es cóncava hacia arriba en $(-\infty,-1)$ y en $(1,\infty)$, mientras que f es cóncava hacia abajo en $(-1,1)$.

(d) Esta función tiene dos puntos de inflexión $(-1,f(-1))=(-1,0)$ y $(1,f(1))=(1,0)$.

(e) La gráfica de f no posee asíntotas. Un esbozo de esta gráfica está dada por:



Evaluación.

- **C1(a)** Asignar (**1 pto**) por determinar que f es creciente en $(-\infty, -1)$. Este puntaje se asignará siempre y cuando el resultado se deduzca de la construcción de una tabla de signos.
- **C2(a)** Asignar (**1 pto**) por determinar que f es creciente en $(-1, 0)$. Este puntaje se asignará siempre y cuando el resultado se deduzca de la construcción de una tabla de signos.
- **C3(a)** Asignar (**1 pto**) por determinar que f es decreciente en $(0, 1)$. Este puntaje se asignará siempre y cuando el resultado se deduzca de la construcción de una tabla de signos.
- **C4(a)** Asignar (**1 pto**) por determinar que f es decreciente en $(1, \infty)$. Este puntaje se asignará siempre y cuando el resultado se deduzca de la construcción de una tabla de signos.

  Si el estudiante concluye que es creciente en $(-\infty, 0)$, asignar **C1(a)** y **C1(b)**, siempre y cuando haya una tabla de signos que justifique correctamente su afirmación.

  Si el estudiante concluye que es decreciente en $(0, \infty)$, asignar **C3(a)** y **C4(b)**, siempre y cuando haya una tabla de signos que justifique correctamente su afirmación.

- **C1(b)** Asignar (**2 pto**) por decir que $f(0) = 1$ es un máximo local de f. Para asignar el puntaje se debe calcular $f(0)$ y decir que es máximo local.

- **C1(c)** Asignar (**2 pto**) por determinar que f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1)$. Este puntaje se asignará siempre y cuando el resultado se deduzca de la construcción de una tabla de signos.
- **C2(c)** Asignar (**2 pto**) por determinar que f es cóncava hacia arriba en $(1, \infty)$. Este puntaje se asignará siempre y cuando el resultado se deduzca de la construcción de una tabla de signos.
- **C3(c)** Asignar (**2 pto**) por determinar que f es cóncava hacia abajo en $(-1, 1)$. Este puntaje se asignará siempre y cuando el resultado se deduzca de la construcción de una tabla de signos.

- **C1(d)** Asignar (**1 pto**) por determinar a $(-1, 0)$ como punto de inflexión de f.
- **C2(d)** Asignar (**1 pto**) por determinar a $(1, 0)$ como punto de inflexión de f.

- **C1(e)** Asignar (**2 pto**) por la gráfica de f sobre el intervalo $(-1, 1)$, correspondiente a una curva simétrica sobre dicho intervalo, y cóncava hacia abajo.
- **C2(e)** Asignar (**2 pto**) por la gráfica de f sobre en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$, siendo una el reflejo de la otra respecto al eje Y, y cóncava hacia arriba.
- **C3(e)** Asignar (**1 pto**) por la intersección con el eje X: $(\pm 1, 0)$.
- **C4(e)** Asignar (**1 pto**) por la intersección con el eje Y: $(0, 1)$.

2. Pregunta 2

SOLUCIÓN

(a) La distancia d entre el punto $(2,8)$ y la curva $y = 2\sqrt{x}$ satisface la ecuación

$$d^2 = (x-2)^2 + (2\sqrt{x}-8)^2, \quad x \geq 0$$

Para $x > 0$ derivando implícitamente esta expresión, obteniendo

$$2dd' = 2(x-2) + 2(2\sqrt{x}-8)\frac{1}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad dd' = x - \frac{8}{\sqrt{x}}$$

Como el punto $(2,8)$ no está en la curva, se tendrá que $d \neq 0$ y por tanto los números críticos de d corresponden a los ceros de la ecuación

$$x - \frac{8}{\sqrt{x}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^{3/2}-8}{\sqrt{x}} = 0$$

que tiene por raíces a $x = 4$. Haciendo una tabla de signos para d' tendremos que

	$(0,4)$	$(4,\infty)$
$x^{3/2}-8$	$-$	$+$
$\sqrt{x}$	$+$	$+$
$d'(x)$	$-$	$+$

concluyendo así que d tiene un mínimo local en $x = 4$. Este mínimo será absoluto por ser $x = 4$ el único número crítico en el dominio.

Por lo anterior, las coordenadas del punto pedido son $(4,4)$.

(b) Aplicando L'Hopital dos veces tendremos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)-\sin(x)}{x\sin(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{x+1}-\cos(x)}{\sin(x)+x\cos(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{1}{(x+1)^2}+\sin(x)}{2\cos(x)-x\sin(x)} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Evaluación.

- **C1(a)** Asignar (**2 pto**) por establecer correctamente una ecuación para la distancia d en términos de x.
- **C2(a)** Asignar (**2 pto**) por derivar explícita o implícitamente respecto a x la ecuación. Se entiende que no se deben cometer errores al derivar para asignar el puntaje.
- **C3(a)** Asignar (**2 pto**) por determinar a $x = 4$ como número crítico para d.
- **C4(a)** Asignar (**2 pto**) por justificar (puede ser mediante tabla de signo u otra) que d tiene un mínimo global en $x = 4$.
- **C5(a)** Asignar (**2 pto**) por determinar las coordenadas pedidas. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumplan los criterios **C1(a)**, **C2(a)** y **C3(a)**.

- **C1(b)** Asignar (**2 pto**) por aplicar correctamente la regla de L'Hopital la primera vez y obtener $\lim_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x+1} - \cos(x)}{\sin(x) + x\cos(x)}$ o una expresión equivalente.
- **C2(b)** Asignar (**2 pto**) por aplicar correctamente la regla de L'Hopital la segunda vez.
- **C3(b)** Asignar (**2 pto**) por obtener el valor del límite. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumplan los criterios **C1(b)** y **C2(b)**.

3. Pregunta 3

SOLUCIÓN

(a) Usamos la regla del producto y cadena para derivar G, es decir,

$$G'(x) = \int_0^{x^2} g(t)\,dt + 2x^2 g(x^2)$$

Evaluando en $x = 3$ tendremos

$$G'(3) = \int_0^{9} g(t)\,dt + 2 \cdot 9 \cdot g(9) = 5 + 2 \cdot 9 \cdot (-1) = -13$$

(b) Bajo la interpretación de área, la integral pedida se puede dividir en

$$\int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx + \int_4^6 f(x)\,dx = \frac{3}{2} - 1 + 2 = \frac{5}{2}$$

Evaluación.

- **C1(a)** Asignar (**3 pto**) por calcular correctamente la derivada de $\int_0^{x^2} g(t)\,dt$
- **C2(a)** Asignar (**3 pto**) por calcular correctamente la derivada de $G(x)$.
- **C3(a)** Asignar (**4 pto**) por determinar correctamente el valor de $G'(3)$.

- **C1(b)** Asignar (**2 pto**) por determinar el valor de $\int_0^2 f(x)\,dx$
- **C2(b)** Asignar (**2 pto**) por determinar el valor de $\int_2^4 f(x)\,dx$
- **C3(b)** Asignar (**2 pto**) por determinar el valor de $\int_4^6 f(x)\,dx$

4. Pregunta 4

SOLUCIÓN

(a) **(i)** Haciendo el cambio de variable $u = \ln(x)$ tendremos

$$\int_e^{e^4} \frac{\sin(\ln(x))}{x}\,dx = \int_1^4 \sin(u)\,du = -\cos(u)\Big|_1^4 = \cos(1) - \cos(4)$$

(ii) Haciendo el cambio de variable $u = x^2$ tendremos

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{u}{\sqrt{u-1}}\,du \\ &= \frac{1}{2}\int \sqrt{u-1}\,du + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u-1}}\,du \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}(u-1)^{3/2} + 2\sqrt{u-1}\right) + C \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}(x^2-1)^{3/2} + 2\sqrt{x^2-1}\right) + C\end{aligned}$$

(b) Siguiendo la sugerencia, definamos $F(t) = \sinh(t) - t$ y probemos que $F'(t) \geq 0$. Usando el TVM sobre el intervalo $[0, t]$ tendremos que

$$\frac{F(t) - F(0)}{t - 0} = F'(c), \quad 0 < c < t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sinh(t) - t}{t} = \frac{e^c + e^{-c}}{2} - 1 = \frac{(e^c - 1)^2}{2e^c} \geq 0$$

ya que $F(0) = 0$. Dado que $t \geq 0$ tendremos

$$\frac{\sinh(t) - t}{t} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sinh(t) - t \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sinh(t) \geq t$$

De lo anterior, y como $t \geq 0$, tendremos

$$\sinh(t) \geq t \quad \Rightarrow \quad \frac{\sinh(t)}{t} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^x \frac{\sinh(t)}{t}\,dt \geq \int_0^x 1\,dt = x$$

Evaluación.

- **C1(ai)** Asignar (**2 pto**) por hacer correctamente el cambio de variable $u = \ln(x)$, obteniendo $\int_1^4 \sin(u)\, du$.
- **C2(ai)** Asignar (**1 pto**) por conocer una antiderivada de $\sin(u)$, por ejemplo $-\cos(u)$.
- **C3(ai)** Asignar (**1 pto**) por obtener como resultado de la integral pedida $\cos(1) - \cos(4)$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumplan los criterios **C1(a)** y **C2(a)**, y no haya errores de cálculos.

- **C1(aii)** Asignar (**2 pto**) por hacer correctamente el cambio de variable $u = x^2$ o $u = x^2 - 1$.
- **C2(aii)** Asignar (**2 pto**) por calcular correctamente la integral definida que resulta luego del cambio de variable (no es necesario haber agregado la constante C). Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumpla el criterio **C1(aii)**.
- **C3(aii)** Asignar (**1 pto**) por volver correctamente a la variable x. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumpla el criterio **C2(aii)**.
- **C4(aii)** Asignar (**1 pto**) por la constante C. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumpla el criterio **C3(aii)**.

- **C1(b)** Asignar (**2 pto**) por demostrar que $\sinh(t) - t \geq 0$ (para $t \geq 0$) o $\dfrac{\sinh(t) - t}{t} \geq 0$ (para $t > 0$).
- **C2(b)** Asignar (**2 pto**) por demostrar la desigualdad pedida a partir de $\sinh(t) - t \geq 0$ o $\dfrac{\sinh(t) - t}{t} \geq 0$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumpla el criterio **C1(b)**.