Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre de 2024

Cálculo I ⋆ MAT1610

Interrogación 2

1. *a*) (**8 ptos**) Determine el o los valores de a para que

$$f(x) = \begin{cases} 2\sin(x) & x < 0 \\ (x-a)^2 - 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 0$. Todos sus resultados deben ser justificados mediante el cálculo de límites.

b) (**9 ptos**) Calcule las siguientes derivadas

(i) $\dfrac{d}{dx} e^x \sin(x)$ (ii) $\dfrac{d}{dx} \arctan\big(\ln(x)\big)$ (iii) $\dfrac{d}{dx} x^{\sin(x)}$

Solución.

a) Para que f sea continua se debe cumplir que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

donde

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} 2\sin(x) = 2\sin(0) = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \Big((x-a)^2 - 1\Big) = (0-a)^2 - 1 = a^2 - 1 \\ f(0) &= (0-a)^2 - 1 = a^2 - 1 \end{aligned}$$

De las relaciones anteriores, dada la continuidad de f en $x = 0$, se obtiene que $a^2 - 1 = 0$. Por lo tanto, f es continua en $x = 0$ siempre y cuando $a = -1$ o $a = 1$.

La condición de derivable en $x = 0$ es equivalente a

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \quad \text{existe.}$$

Donde,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2\sin(h) - \overbrace{(a^2-1)}^{0}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2\sin(h)}{h} = 2$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\Big((h-a)^2 - 1\Big) - (a^2-1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2 - 2ah}{h} = \lim_{h\to 0^+} (h - 2a) = -2a$$

De lo anterior, de la condición de derivada en $x = 0$ se obtiene que $2 = -2a$. Por lo tanto, f es continua y derivable en $x = 0$ siempre y cuando $a = -1$.

b) (i)

$$\frac{d}{dx}e^x \sin(x) = (e^x)' \sin(x) + e^x (\sin(x))' = e^x \sin(x) + e^x \cos(x)$$

(ii)

$$\frac{d}{dx} \arctan\big(\ln(x)\big) = \arctan'\big(\ln(x)\big)(\ln(x))' = \frac{1}{1+\ln^2(x)} \cdot \frac{1}{x}$$

(iii) Definamos $f(x) = x^{\sin(x)}$, luego

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{d}{dx}\ln(f(x)) = \frac{d}{dx}\sin(x)\ln(x) = \cos(x)\ln(x) + \sin(x)\cdot\frac{1}{x}$$

Por lo anterior,

$$\frac{d}{dx}x^{\sin(x)} = x^{\sin(x)}\left(\cos(x)\ln(x) + \sin(x)\cdot\frac{1}{x}\right)$$

Evaluación.

- **C1(a)** Asignar (**1 pto**) por calcular $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$
- **C2(a)** Asignar (**1 pto**) por calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = a^2 - 1$.
- **C3(a)** Asignar (**1 pto**) por establecer la ecuación $a^2 - 1 = 0$ o equivalente. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumplan los criterios **C1(a)** y **C3(a)**.
- **C4(a)** Asignar (**2 pto**) por calcular $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = 2$, usando que $a^2 - 1 = 0$.
- **C5(a)** Asignar (**2 pto**) por calcular $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = -2a$
- **C6(a)** Asignar (**1 pto**) por concluir que f es (continua y) derivable en $x = 0$ siempre y cuando $a = -1$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumplan los criterios **C4(a)** y **C5(a)**.

- **C1(b)** Asignar (**1 pto**) por conocer que $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$.
- **C2(b)** Asignar (**1 pto**) por conocer que $\dfrac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$.
- **C3(b)** Asignar (**1 pto**) por calcular correctamente $\dfrac{d}{dx}e^x \sin(x)$.
- **C4(b)** Asignar (**1 pto**) por calcular correctamente $\big(\arctan(\,\cdot\,)\big)' = \dfrac{1}{1+(\,\cdot\,)^2}$.
- **C5(b)** Asignar (**1 pto**) por calcular correctamente $\dfrac{d}{dx}\ln(x) = \dfrac{1}{x}$.
- **C6(b)** Asignar (**1 pto**) por calcular correctamente $\dfrac{d}{dx}\arctan(\ln(x))$.
- **C7(b)** Asignar (**1 pto**) por calcular correctamente $\dfrac{d}{dx}\ln(f(x)) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.
- **C8(b)** Asignar (**1 pto**) por calcular correctamente $\dfrac{d}{dx}\sin(x)\ln(x)$.
- **C9(b)** Asignar (**1 pto**) por calcular correctamente $\dfrac{d}{dx}x^{\sin(x)}$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumplas los criterios **C7(b)** y **C8(b)**

  Nota. Si el estudiante usó la representación exponencial $x^{\sin(x)} = e^{\sin(x)\ln(x)}$ y derivó correctamente, obteniendo el resultado esperado: asignar todo los puntos correspondientes a ejercicio (iii).

2. *a*) (**8 ptos**) Sean a y b números reales tales que

$$f(x) = ax^2 + bx$$

tiene por recta tangente a $y = 3x - 2$ en $x = 1$. Determine los valores de a y b.

b) (**8 ptos**) Determine una ecuación para la recta tangente a la curva

$$x^3 + y^3 = 2xy$$

en el punto $(1, 1)$.

Solución.

a) Recordemos que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(1, f(1))$ está dada por

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1)$$

De lo anterior, el coeficiente que acompaña a x corresponde a $f'(1)$ y al evaluar $x = 1$ tendremos que $y = f(1)$. En nuestro caso

$$f'(1) = 3 \quad \text{y} \quad f(1) = 3(1) - 2 = 1$$

Por otro lado, $f'(x) = 2ax + b$ luego

$$\begin{aligned} 1 &= f(1) = a + b \\ 3 &= f'(1) = 2a + b \end{aligned}$$

sistema que tiene por solución $a = 2$ y $b = -1$.

b) Supondremos que $y = y(x)$, y derivamos respecto a x obteniendo

$$3x^2 + 3y^2y' = 2y + 2xy'$$

Dado que $y(1) = 1$, tendremos

$$3 \cdot (1)^2 + 3 \cdot (1)^2 y'(1) = 2 \cdot (1) + 2 \cdot (1) y'(1) \quad \Rightarrow \quad y'(1) = -1$$

Por lo tanto, una ecuación para la tangente pedida es $y - 1 = -(x - 1)$.

Evaluación.

- **C1(a)** Asignar (**2 pto**) por deducir el valor de $f(1) = 1$.
- **C2(a)** Asignar (**2 pto**) por deducir el valor de $f'(1) = 3$.
- **C3(a)** Asignar (**2 pto**) por obtener el sistema $a + b = 1$, $2a + b = 3$.
- **C4(a)** Asignar (**1 pto**) por deducir el valor de $a = 2$.
- **C5(a)** Asignar (**1 pto**) por deducir el valor de $b = -1$.

- **C1(b)** Asignar (**3 pto**) por derivar de manera implícita respecto a x y obtener la ecuación $3x^2 + 3y^2y' = 2y + 2xy'$ o una equivalente.
- **C2(b)** Asignar (**3 pto**) por evaluar la ecuación $3x^2 + 3y^2y' = 2y + 2xy'$ con $x = 1$ e $y = 1$ y obtener la expresión $3 \cdot (1)^2 + 3 \cdot (1)^2 y' = 2 \cdot (1) + 2 \cdot (1) y'$ o una expresión equivalente. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumpla el criterio **C1(b)**.
- **C3(b)** Asignar (**2 pto**) por obtener la ecuación de la recta tangente: $y - 1 = -1(x - 1)$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumpla el criterio **C2(b)**.

3. *a*) (**8 ptos**) Sea $f(x) = \sqrt{x}\cos(\pi x)$, determine la linealización de f en $x = 1$ y úsela para estimar el valor de $f(1.1)$.

Nota. El decimal 1.1 corresponde a la fraccción $\frac{11}{10}$.

b) (**10 ptos**) Dos personas parten desde el mismo punto. Una se dirige hacia el **Norte** a $12\,km/h$ y la otra hacia el **Este** a $5\,km/h$. Usando **razón de cambio**, determine con qué rapidez se incrementa la distancia entre las personas dos horas después.

Solución.

a) La linealización es de la forma $L(x) = f(1) + f'(1)(x-1)$ donde

$$f(1) = \sqrt{1}\cos(\pi) = -1$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos(\pi x) + \sqrt{x}\,\pi\sin(\pi x)$$
$$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}}\cos(\pi) + \sqrt{1}\,\pi\sin(\pi) = -\frac{1}{2}$$

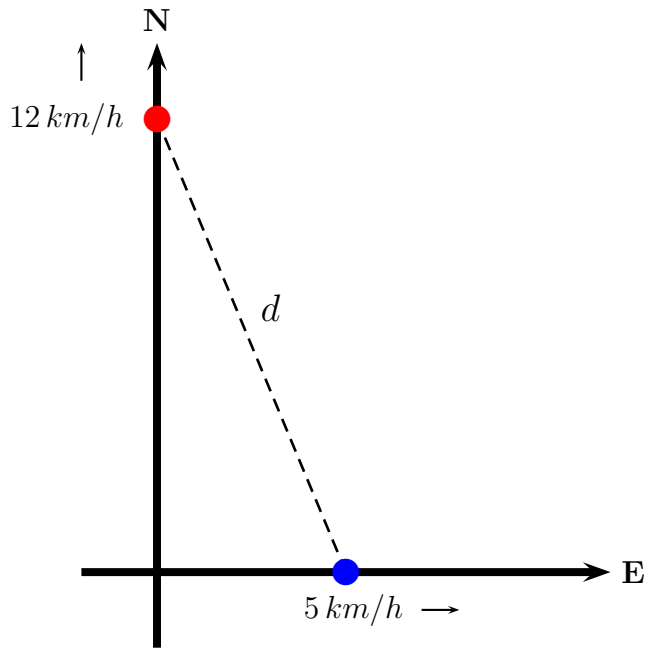
De este modo,

$$L(x) = -1 - \frac{1}{2}(x-1)$$

De lo anterior, la estimación de $f(1.1)$ dada por esta linealización es

$$f(1.1) \approx L(1.1) = -1 - \frac{1}{2}(1.1-1) = -1 - \frac{0.1}{2} = -1 - \frac{1}{20} = -\frac{21}{20}$$

b) Una representación gráfica del problema es



Si x es la posición de la persona que se mueve hacia el **Este** e y es la posición de la persona que se mueve hacia el **Norte**, entonces la distancia entre las personas está dada por

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Derivando esta exxpresión respecto al tiempo tendremos

$$d' = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \Rightarrow \quad d' = \frac{xx' + yy'}{d}$$

Dada la rapidez de las personas, al cabo de dos horas $x = 10$ e $y = 24$ y por tanto

$$d' = \frac{(10) \cdot (5) + (24) \cdot (12)}{26} = 13$$

Por lo tanto la rapidez con que incrementa la distancia entre las personas dos horas después es de $13\, km/h$.

Evaluación.

- **C1(a)** Asignar (**1 pto**) por calcular $f(1) = -1$.
- **C2(a)** Asignar (**2 pto**) por calcular $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(\pi x) + \sqrt{x}\, \pi \sin(\pi x)$ o una expresión equivalente.
- **C3(a)** Asignar (**1 pto**) por calcular $f'(1) = -1/2$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumpla el criterio **C2(a)**.
- **C4(a)** Asignar (**2 pto**) por obtener la aproximación lineal $L(x) = -1 - \frac{1}{2}(x - 1)$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumplan los criterios **C1(a)** y **C3(a)**.
- **C5(a)** Asignar (**2 pto**) por calcular $L(1.1) = -21/20$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumpla el criterio **C4(a)**.

- **C1(b)** Asignar (**2 pto**) por establecer la ecuación $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ o $d^2 = x^2 + y^2$.
- **C2(b)** Asignar (**2 pto**) por derivar de manera implícita la ecuación $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ o $d^2 = x^2 + y^2$, obteniendo o bien $d = (xx' + yy')/\sqrt{x^2 + y^2}$ o bien $d = (xx' + yy')/d$ o una expresión equivalente.
- **C3(b)** Asignar (**2 pto**) por identificar que $x = 10$.
- **C4(b)** Asignar (**2 pto**) por identificar que $y = 24$.
- **C5(b)** Asignar (**2 pto**) por evaluar $x = 10$, $x' = 5$, $y = 24$ e $y' = 12$ para obtener que $d' = 13$.

4. *a*) (**10 ptos**) Determine el valor mínimo absoluto (global) y el valor máximo absoluto (global) de

$$f(x) = x^4(1-x)^6$$

en el intervalo $[0, 1]$.

b) (**6 ptos**) Sea f una función derivable en $\mathbb{R}$ y sea a un número real tal que para todo $x \neq a$ se cumple que $f'(a) \neq f'(x)$. Demuestre que la recta tangente a la gráfica de f en $(a, f(a))$ intersecta a la gráfica de f únicamente en el punto $(a, f(a))$.

Solución.

a) Los valores extremos de f se dan en los números críticos o en los extremos del intervalo. En nuestro caso

$$f'(x) = 4x^3(1-x)^6 - 6x^4(1-x)^5 = x^3(1-x)^5(4(1-x) - 6x) = x^3(1-x)^5(4-10x)$$

Dado que el dominio de f es el intervalo $[0, 1]$, f posee un único número crítico en $x = 2/5$. Luego,

$$f(0) = f(1) = 0$$
$$f(2/5) = \left(\frac{2}{5}\right)^4 \left(\frac{3}{5}\right)^6 > 0$$

Por lo tanto, $f(0) = f(1) = 0$ es el mínimo absoluto de f y $f(2/5) = 2^4 \cdot 3^6/5^{10}$ es el máximo absoluto.

b) La recta tangente a f en el punto $(a, f(a))$ está dada por $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. Los puntos de intersección entre dicha recta y la gráfica de f corresponden a los valores de x que satisfacen la ecuación

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Queremos probar que esta ecuación tiene solución y ésta es única. Es claro que $x = a$ satisface esta ecuación, por lo que al menos hay una solución. Ahora probemos que no hay más soluciones, para ello supondremos que al menos hay dos: $x = a$ y $x = b$.

Alternativa 1. Reemplazando $x = b$ en la ecuación tendremos

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) \quad \Rightarrow \quad f'(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$$

para algún $c \in (a, b)$, por el TMV. Esto no puede ser ya que $f'(a) \neq f'(x)$ para todo $x \neq a$.

Alternativa 2. Definamos

$$F(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a), \quad x \in [a, b]$$

Esta función es continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre (a, b), por ser derivable sobre $\mathbb{R}$. Además, $F(a) = F(b) = 0$, luego por el teorema de Rolle existe $c \in (a, b)$ tal que $F'(c) = 0$, es decir

$$0 = F'(c) = f'(c) - f'(a) \quad \Leftrightarrow \quad f'(c) = f'(a)$$

Esto no puede ser ya que $f'(a) \neq f'(x)$ para todo $x \neq a$.

Por lo anterior, la gráfica de f y su tangente por $(a, f(a))$ se intersectan en un único punto.

Evaluación.

- **C1(a)** Asignar (**1 pto**) por calcular correctamente $f'(x)$. La expresión puede estar o no factorizada.
- **C2(a)** Asignar (**1 pto**) por obtener $f'(x) = x^3(1-x)^5(4(1-x)-6x)$ o una expresión equivalente en forma factorizada.
- **C3(a)** Asignar (**2 pto**) por obtener $x = 2/5$ (o número equivalente) como número crítico de f.
- **C4(a)** Asignar (**1 pto**) por calcular $f(0)$.
- **C5(a)** Asignar (**1 pto**) por calcular $f(1)$.
- **C6(a)** Asignar (**2 pto**) por calcular $f(2/5)$. En este caso es suficiente con evaluar y dejar expresado en potencias. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumpla el criterio **C2(a)**.
- **C7(a)** Asignar (**1 pto**) por decir/escribir que el mínimo absoluto es $f(0) = 0$ o $f(1) = 0$.
- **C8(a)** Asignar (**1 pto**) por decir/escribir que el máximo absoluto es $f(2/5) = 2^4 \cdot 3^6/5^{10}$ o una expresión equivalente.

  Nota. Si el estudiante equivoca en calcular la derivada pero obtiene que $f'(x) = x^3(1-x)^5(a-bx)$ y deduce que $f(0) = f(1) = 0$ es mínimo absoluto y que $f(a/b)$ es máximo absoluto, asignar el puntaje de los criterios: **C4(a)**, **C5(a)**, **C7(a)** y **C8(a)**.

- **C1(b)** Asignar (**1 pto**) por escribir la ecuación $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ o una equivalente.
- **C2(b)** Asignar (**1 pto**) por decir/escribir que la ecuación $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ tiene a $x = a$ entre sus soluciones.
- **C3(b)** Asignar (**3 pto**) por la demostración de la Alternativa 1 o Alternativa 2.
- **C4(b)** Asignar (**1 pto**) por concluir que el punto $(a, f(a))$ es el único punto en que se intersectan f y su tangente por dicho punto. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumplan los criterios **C1(b)**, **C2(b)** y **C3(b)**.

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular y/o relojes inteligente prendidos