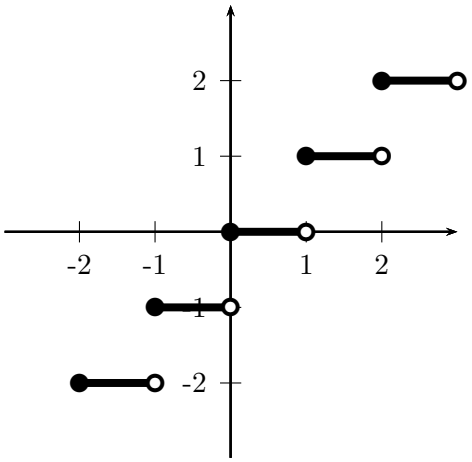
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre de 2024

Cálculo I ⋆ MAT1610

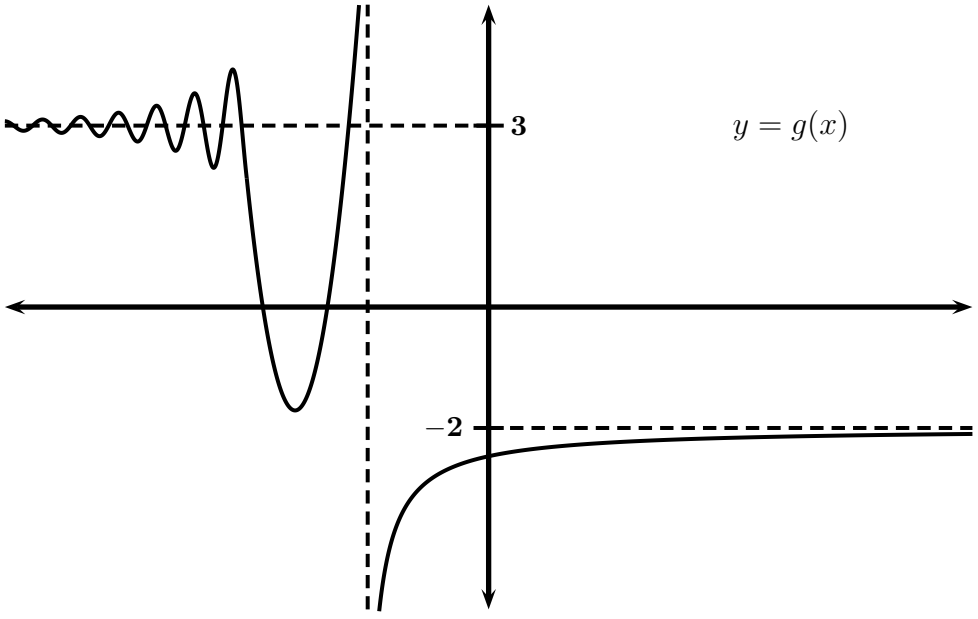
Interrogación 1

1. *a*) (**6 ptos**) La gráfica corresponde a la función **parte entera** x, que denotaremos $[x]$.



Si $f(x) = [x] + x$, calcule $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$. ¿Qué puede decir de la existencia de $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$?

b) (**6 ptos**) En la imagen se muestra la gráfica de g, sobre todos los reales.



Si $h(x) = \dfrac{2 - g(x)}{1 + g(x)}$, calcule $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x)$ y $\lim\limits_{x\to \infty} h(x)$.

Solución.

a) Usando las propiedades de los límites y la gráfica de $[x]$ tendremos que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} [x] + \lim_{x\to 1^-} x = 0 + 1 = 1$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} [x] + \lim_{x\to 1^+} x = 1 + 1 = 2$$

Como los límites laterales son diferentes, se concluye que $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe.

b) A partir de la gráfica de g se tiene que

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2-g(x)}{1+g(x)} = \frac{2-3}{1+3} = -\frac{1}{4}$$
$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2-g(x)}{1+g(x)} = \frac{2-(-2)}{1+(-2)} = -4$$

Evaluación

- **C1(a)** Asignar **(2 pto)** por calcular correctamente $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.
- **C2(a)** Asignar **(2 pto)** por calcular correctamente $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.
- **C3(a)** Asignar **(2 pto)** por deducir que $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumplan los criterios **C1(a)** y **C2(a)**

- **C1(b)** Asignar **(1 pto)** por identificar el valor de $\lim_{x\to-\infty} g(x)$. Esto puede ser explícito o implícito en el cálculo de $\lim_{x\to-\infty} h(x)$.
- **C2(b)** Asignar **(2 pto)** por determinar el valor de $\lim_{x\to-\infty} h(x)$. Si el estudiante calcula este límite se debe considerar correcto el criterio **C1(b)**.
- **C3(b)** Asignar **(1 pto)** por identificar el valor de $\lim_{x\to\infty} g(x)$. Esto puede ser explícito o implícito en el cálculo de $\lim_{x\to\infty} h(x)$.
- **C4(b)** Asignar **(2 pto)** por determinar el valor de $\lim_{x\to\infty} h(x)$. Si el estudiante calcula este límite se debe considerar correcto el criterio **C1(b)**.

2. *a*) (**6 ptos**) Determine las ecuaciones de la(s) asíntota(s) vertical(es) de

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$$

b) (**8 ptos**) Determine el valor de a en los reales para

$$\lim_{y\to\infty} \sqrt{y^2 + 5y + 6} - \sqrt{y^2 + ay - 1} = -1$$

Solución.

a) Las asíntotas de f pueden estar en los números donde su denominador se anula. En nuestro caso, esto valores corresponden a las soluciones de la ecuación $x^2-x-2 = 0$ o $(x+1)(x-2) = 0$, que están dada por $x = -1$ y $x = 2$. Ahora determinemos si hay asíntota en estos valores:

- $x = -1$.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x+2}{x+1} = \infty$$

- $x = 2$.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x+1} = \frac{4}{3}$$

Ya que f tiene a ∞ (o $-\infty$) por algunos de los laterales (-1^+) se concluye que f tiene por asíntota vertical a $x = -1$. Por otro lado, ya que f tiene a un número cuando nos acercamos a $x = 2$ se concluye que f NO tiene asíntota vertical en $x = 2$.

b) Para calcular este límite procederemos racionalizando y luego amplificando por $1/y$,

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to\infty} \sqrt{y^2 + 5y + 6} - \sqrt{y^2 + ay - 1} &= \lim_{y\to\infty} \frac{(5-a)y + 7}{\sqrt{y^2 + 5y + 6} + \sqrt{y^2 + ay - 1}} \\
&= \lim_{y\to\infty} \frac{(5-a) + 7/y}{\sqrt{1 + 5/y + 6/y^2} + \sqrt{1 + a/y - 1/y^2}} \\
&= \frac{5-a}{2}
\end{aligned}$$

Ya que este límite debe ser -1, tendremos la ecuación

$$\frac{5-a}{2} = -1$$

que tiene por solución $a = 7$.

Evaluación

- **C1(a)** Asignar **(2 pto)** por calcular correctamente alguno de los siguientes límites: $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ o $\lim_{x\to -1^+} f(x)$.
- **C2(a)** Asignar **(2 pto)** por calcular correctamente el límite: $\lim_{x\to 2} f(x)$.
- **C3(a)** Asignar **(1 pto)** por deducir que f tiene a $x = -1$ por asíntota vertical. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumpla el criterio **C1(a)**.
- **C4(a)** Asignar **(1 pto)** por deducir que f NO tiene asíntota vertical en $x = 2$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumpla el criterio **C2(a)**.

- **C1(b)** Asignar **(2 pto)** por racionalizar correctamente.
- **C2(b)** Asignar **(2 pto)** por amplificar por $1/y$ correctamente ó factorizar numerador y denominador por y correctamente. Este puntaje se asignará siempre y cuando el estudiante haya razionalizado, aun cuando se haya equivocado en racionalizar.
- **C3(b)** Asignar **(2 pto)** por calcular correctamente el límite. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumplan los criterios **C1(b)** y **C2(b)**.
- **C4(b)** Asignar **(2 pto)** por determinar el valor de a. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumplan los criterios **C1(b)**, **C2(b)** y **C3(b)**.

3. Calcule los siguientes límites

   a) (**4 ptos**) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}$

   b) (**6 ptos**) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)(e^{\sin(x)}-1)}$

Solución.

a) Razonalizando, tendremos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x+2}-1}{x+1} &= \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{(x+1)\left(\sqrt{x+2}+1\right)} \\ &= \lim_{x\to -1} \frac{1}{\sqrt{x+2}+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1}+1} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

b) Alternativa 1. Construiremos límites notables,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)(e^{\sin(x)}-1)} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{\frac{e^{\sin(x)}-1}{\sin(x)}} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ya que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)}-1}{\sin(x)} = \lim_{u\to 0} \frac{e^u-1}{u} = 1$$

y ya que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} \frac{1}{1+\cos(x)} = 1 + \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Alternativa 2. Amplificamos por $1+\cos(x)$ y tendremos,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)(e^{\sin(x)}-1)} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{\sin(x)(e^{\sin(x)}-1)} \cdot \frac{1}{1+\cos(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{\sin(x)(e^{\sin(x)}-1)} \cdot \frac{1}{1+\cos(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{e^{\sin(x)}-1}{\sin(x)}} \cdot \frac{1}{1+\cos(x)} \\ &= \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ya que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)}-1}{\sin(x)} = \lim_{u\to 0} \frac{e^u-1}{u} = 1$$

- **C1(a)** Asignar **(1 pto)** por racionalizar correctamente.
- **C2(a)** Asignar **(2 pto)** por obtener la expresión $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+1}$.
- **C3(a)** Asignar **(1 pto)** por obtener el valor del límite. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumplan los criterios **C1(a)** y **C2(a)**.

- **C1(b)** Asignar **(2 pto)** por calcular/conocer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin(x)}-1}{\sin(x)}$.
- **C2(b)** Asignar **(2 pto)** por calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+\cos(x)}$.
- **C3(b)** Asignar **(2 pto)** por calcular el límite pedido. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumplan los criterios **C1(b)** y **C2(b)**.

4. *a*) (**8 ptos**) Determine el(los) valor(es) de a para los cuales

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + a^2 & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

sea continua en $x = 0$.

b) (**6 ptos**) Suponga que $f(x)$ es una función continua sobre el intervalo $[0, 2]$ que satisface $f(0) > 0$ y $f(2) < 4$. Demuestre que existe c entre 0 y 2 tal que $f(c) = c^2$.

Solución.

a) Para que f sea continua en $x = 0$ se debe cumplir que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

En nuestro caso, esto corresponde a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(ax)}{x} = a \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(ax)}{ax} = a \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \left(x^2 + a^2\right) = a^2 \\ f(0) &= a^2 \end{aligned}$$

De este modo, la continuidad en $x = 0$ establece la ecuación $a = a^2$, que tiene por solución $a = 0$ y $a = 1$. Por lo tanto, f es continua en $x = 0$ tanto si $a = 0$ como si $a = 1$.

b) Definamos $F(x) = f(x) - x^2$, función con dominio $[0, 2]$.

- F es continua sobre el intervalo $[0, 2]$ por ser la diferencia (resta) entre dos funciones continuas: f es continua por el enunciado del ejercicio y x^2 es continua por ser un polinomio.
- $F(0) = f(0) - 0^2 = f(0) > 0$, propiedad en el enunciado del ejercicio.
- $F(2) = f(2) - 2^2 = f(2) - 4 < 0$, propiedad en el enunciado del ejercicio: $f(2) < 4 \Leftrightarrow f(2) - 4 < 0$.

Por el TVI se deduce que existe $c \in (0, 2)$ tal que

$$F(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - c^2 = 0 \Leftrightarrow f(c) = c^2$$

Con lo anterior, queda demostrado el ejercicio.

Evaluación

- **C1(a)** Asignar **(2 pto)** por calcular correctamente $\lim_{x\to 0^-} f(x)$.
- **C2(a)** Asignar **(2 pto)** por calcular correctamente $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.
- **C3(a)** Asignar **(1 pto)** por calcular correctamente $f(0)$.
- **C4(a)** Asignar **(1 pto)** por establecer la ecuación $a^2 = a$. Este puntaje se asigará siempre y cuando se cumplan los criterios **C1(a)**, **C2(a)** y **C3(a)**.
- **C5(a)** Asignar **(1 pto)** por decir/escribir que f es continua para $a = 0$. Este puntaje se asigará siempre y cuando se cumpla el criterio **C4(a)**.
- **C6(a)** Asignar **(1 pto)** por decir/escribir que f es continua para $a = 1$. Este puntaje se asigará siempre y cuando se cumpla el criterio **C4(a)**.

- **C1(b)** Asignar **(1 pto)** por definir $F(x) = f(x) - x^2$ o $F(x) = x^2 - f(x)$.

- **C2(b)** Asignar **(1 pto)** por decir/escribir que $F(x)$ es continua sobre $[0, 2]$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se entregue un argumento de **por qué** es continua, por ejemplo: **por ser diferencia/resta de funciones continuas**.
- **C3(b)** Asignar **(1 pto)** por mostrar/demostrar que $F(0) > 0$, usando que $f(0) > 0$.
- **C4(b)** Asignar **(1 pto)** por mostrar/demostrar que $F(2) < 0$, usando que $f(2) < 4$.
- **C5(b)** Asignar **(2 pto)** por concluir que existe $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = c^2$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumplan los criterios **C1(b)**, **C3(b)** y **C4(b)**.

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular y/o relojes inteligente prendidos