Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2024

Cálculo 1 ⋆ MAT1610

Examen

1. **(a)** **(6 ptos)** Calcule los siguientes límites.

(i) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ **(ii)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(2x)-1}{x^2}$

(b) **(8 ptos)** Determine el conjunto donde la función

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t+t^2}$$

es cóncava hacia abajo.

Solución

(a) **(i)** Para calcular este límite racionalizaremos:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

(ii) Haciendo el cambio de variable $u = 2x$ tendremos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-1}{x^2} = 4\lim_{u\to 0}\frac{\cos(u)-1}{u^2} = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

(b) Usando el TFC (Parte I) tendremos que

$$F'(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$$

De este modo $F''(x) = -\dfrac{2x+1}{(1+x+x^2)^2}$, expresión que es negativa siempre y cuando $2x+1>0$ o $x\in(-1/2,\infty)$. Por lo tanto, F es cóncava hacia abajo sobre el conjunto $(-1/2,\infty)$.

Evaluación.

- **C1(ai)** Asignar (**1 pto**) por escribir la racionalización $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$.
- **C2(ai)** Asignar (**2 pto**) por obtener correctamente el valor del límite pedido. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumpla el criterio (**1 pto**), y no haya errores algebraicos o de cálculo.

  Si el estudiante resuelve el ejercicio usando la regla de L'Hopital, llegando al mismo resultado, sin cometer errores de álgebra o cálculo, asignar **C1(ai)** y **C2(ai)**.

- **C1(aii)** Asignar (**1 pto**) por escribir el cambio de variable $u = 2x$. Para asignar el puntaje no es necesario que aplique el cambio de variable.
- **C2(aii)** Asignar (**2 pto**) por obtener correctamente el valor del límite pedido. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumpla el criterio **C1(aii)**, y no haya errores algebraicos o de cálculo.

  Si el estudiante resuelve el ejercicio usando la regla de L'Hopital, llegando al mismo resultado, sin cometer errores de álgebra o cálculo, asignar **C1(aii)** y **C2(aii)**.

- **C1(b)** Asignar (**3 pto**) por calcular correctamente $F'(x)$.
- **C2(b)** Asignar (**3 pto**) por calcular correctamente $F''(x)$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumpla el criterio **C1(b)**.
- **C3(b)** Asignar (**2 pto**) por determinar el conjunto donde F es cóncava hacia abajo. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumplan los criterios **C1(b)** y **C2(b)**.

2. (a) **(6 ptos)** Determine una ecuación para la recta tangente a la curva

$$x^2 + 2xy - y^2 = 1$$

en el punto $(1, 0)$.

(b) **(8 ptos)** Determine el (los) valor(es) de a para que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & x < 0 \\ |x - a| & x \geq 0 \end{cases}$$

admita derivada en $x = 0$. Justifique sus afirmaciones mediante el cálculo de límites.

Solución

(a) Derivando esta ecuación de forma impícita tendremos

$$2x + 2(y + xy') - 2yy' = 0$$

Evaluando $x = 1$ e $y = 0$ tendremos que

$$2 \cdot (1) + 2\Big((0) + (1)y'\Big) - 2(0)y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -1$$

De lo anterior, una ecuación para la tangente en $(1, 0)$ es $y - 0 = -1(x - 1)$.

(b) Para que f sea continua en $x = 0$ se debe cumplir que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

donde

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} \left(x^2 + x + 1\right) = 1 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} |x - a| = |a| \\ f(0) &= |a| \end{aligned}$$

De las relaciones anteriores se obtiene que $|a| = 1$, y por tanto f es continua en $x = 0$ siempre y cuando $a = \pm 1$.

Para estos valores de a, debemos determinar si f admite derivada en $x = 0$.

- $a = -1$. La condición de derivada en $x = 0$ está dada por

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} \quad \text{y ambos existan}$$

donde $f(0) = 1$ y

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2 + h}{h} = 1 \\ \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \frac{|h + 1| - 1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $a = -1$ tendremos que f admite derivada en $x = 0$, con $f'(0) = 1$.

- $a = 1$. La condición de derivada en $x = 0$ está dada por

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} \quad \text{y ambos existan}$$

donde $f(0) = 1$ y

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2 + h}{h} = 1$$
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h - 1| - 1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-h}{h} = -1$$

Como los límites laterales no existen, podemos concluir que f no admite derivada en $x = 0$ cuando $a = 1$.

Evaluación.

- **C1(a)** Asignar (**2 pto**) por derivar correctamente de forma implícita.
- **C2(a)** Asignar (**2 pto**) por obtener el valor de $y'(0)$, luego de evaluar en la ecuación derivada los valores de $x = 1$ y $y = 0$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumpla el criterio **C1(a)**.
- **C3(a)** Asignar (**2 pto**) por obtener la ecuación de la recta. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumplan los criterios **C1(a)** y **C2(a)**.

- **C1(b)** Asignar (**2 pto**) por determinar, usando límites laterales, que f es continua para $a = \pm 1$.
- **C2(b)** Asignar (**2 pto**) por calcular $\lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$.
- **C3(b)** Asignar (**1 pto**) por calcular $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ para $a = -1$.
- **C4(b)** Asignar (**1 pto**) por calcular $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ cuando $a = 1$.
- **C5(b)** Asignar (**1 pto**) por deducir que f admite derivada en $x = 0$ cuando $a = -1$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumplan los criterios **C1(a)**, **C2(a)** y **C3(a)**.
- **C6(b)** Asignar (**1 pto**) por deducir que f admite NO derivada en $x = 0$ cuando $a = 1$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se cumplan los criterios **C1(a)**, **C2(a)** y **C4(a)**.

3. **(a)** **(6 ptos)** La función $f(x) = x^3 - 3x + 2$, con dominio $[0, 2]$. Determine los valores de mínimo y máximo absoluto de f.

(b) **(8 ptos)** Se dispone de $1\,200\,cm^2$ de material para hacer una caja con una base cuadrada y **sin tapa**; determine el mayor volumen posible de la caja.

Solución

(a) Los valores extremos de f, por ser continua y derivable en un cerrado, se obtienen en sus números críticos o en los extremos del intervalo. Los números críticos de f corresponden a los ceros de f', es decir

$$3x^2 - 3 = 0 \quad x = \pm 1$$

siendo $x = 1$ el único número crítico en el dominio de f. De lo anterior,

$$f(0) = 2, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 4$$

Por lo tanto, el valor de mínimo absoluto de f es $f(1) = 0$ mientras que el valor de máximo absoluto de f es $f(2) = 4$.

(b) Si x es la medida de un lado de la base y h la medida de la altura, entonces

$$1200 = x^2 + 4xh \quad \text{y} \quad V = x^2 h$$

De la primera ecuación tendremos que $h = (1200 - x^2)/(4x)$. Reemplazando esta cantidad en la ecuación para el volumen, tendremos

$$V(x) = \frac{x(1200 - x^2)}{4}$$

Para determinar el mayor volumen posible de la caja, derivamos V:

$$V'(x) = 300 - \frac{3}{4}x^2 = \frac{3}{4}(20 - x)(20 + x)$$

cuyos números críticos son $x = \pm 20$, de los cuales solo $x = 20$ nos interesa ya que $x > 0$. Podemos notar que $V''(20) = -(3/2)20 < 0$ por lo que $V(20)$ es un valor de máximo local. Al ser $x = 20$ el único número crítico sobre el dominio de V $(x > 0)$ se deduce que $V(20) = 4000$ es el mayor volumen posible para la caja.

Evaluación.

- **C1(a)** Asignar (**2 pto**) por calcular $f'(x)$.
- **C2(a)** Asignar (**2 pto**) por decir que $f(1) = 0$ es el valor de mínimo absoluto de f. Este puntaje se asignará siempre y cuando se haya evaluado correctamente $f(0)$, $f(1)$ y $f(2)$.
- **C3(a)** Asignar (**2 pto**) por decir que $f(2) = 0$ es el valor de mínimo absoluto de f. Este puntaje se asignará siempre y cuando se haya evaluado correctamente $f(0)$, $f(1)$ y $f(2)$.

- **C1(b)** Asignar (**2 pto**) por determinar correctamente una relación entre x y h mediante el área de la caja.
- **C2(b)** Asignar (**2 pto**) por determinar correctamente una fórmula para el volumen de la caja.
- **C3(b)** Asignar (**2 pto**) por determinar a $x = 20$ como número crítico de V.
- **C4(b)** Asignar (**1 pto**) por calcular $V(20) = 4000$.
- **C5(b)** Asignar (**1 pto**) por argumentar que $V(20)$ es valor de máximo absoluto de V.

Continua...

4. (a) **(12 ptos)** Calcule las siguientes integrales.

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)(x+1)}dx$ **(ii)** $\displaystyle\int x\arcsin(x)\,dx$

(b) **(8 ptos)** Sea $\mathcal{R}$ la región del plano acotada y delimitada por las curvas

$$y=\sqrt{x},\quad y=0,\quad x=1$$

(i) Calcule el área de la región $\mathcal{R}$.

(ii) Calcule el volumen del sólido que resulta al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno a la recta $x=-1$.

Solución

(a) **(i)** Usando la técnica de fracciones parciales tendremos que

$$\frac{x}{(x^2+1)(x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}\qquad=\frac{(A+C)x^2+(A+B)x+(B+C)}{(x^2+1)(x+1)}$$

de donde se deduce que $A+C=0$, $A+B=1$ y $B+C=0$, sistema que tiene por solución $A=B=1/2$ y $C=-1/2$. De este modo,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)(x+1)}dx &= \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{x+1}{x^2+1}-\frac{1}{x+1}\right)dx\\ &=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{x+1}dx\\ &=\frac{1}{4}\ln(x^2+1)\Big|_0^1+\frac{1}{2}\arctan(x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\ln(x+1)\Big|_0^1\\ &=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln(2)\end{aligned}$$

(ii) Usando integración por partes,

$$\int x\arcsin(x)\,dx=\frac{x^2}{2}\arcsin(x)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Para calcular la integral de la derecha procedemos usando el cambio de variable $x=\sin(t)$, obteniendo

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int\frac{\sin^2(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\cos(t)\,dt\\ &=\int\sin^2(t)\,dt\\ &=\frac{1}{2}\int\frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt\\ &=\frac{t}{4}-\frac{\sin(2t)}{8}+C\\ &=\frac{t}{4}-\frac{\sin(t)\cos(t)}{4}+C\\ &=\frac{\arcsin(x)}{4}-\frac{x\sqrt{1-x^2}}{4}+C\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int x \arcsin(x)\, dx = \frac{x^2}{2}\arcsin(x) - \frac{\arcsin(x)}{4} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C$$

(b) **(i)** El área de la región está dada por

$$\int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \frac{x^{3/2}}{3/2}\bigg|_0^1 = \frac{2}{3}$$

(ii) El volumen correspondiente es:

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^1 (x+1)\sqrt{x}\, dx &= 2\pi \int_0^1 x^{3/2}\, dx + 2\pi \int_0^1 \sqrt{x}\, dx \\ &= 2\pi \frac{x^{5/2}}{5/2}\bigg|_0^1 + 2\pi \frac{x^{3/2}}{3/2}\bigg|_0^1 \\ &= 2\pi \frac{2}{5} + 2\pi \frac{2}{3} \\ &= \frac{32\pi}{15} \end{aligned}$$

Evaluación.

- **C1(ai)** Asignar (**1 pto**) por determinar correctamente el valor de A.
- **C2(ai)** Asignar (**1 pto**) por determinar correctamente el valor de B.
- **C3(ai)** Asignar (**1 pto**) por determinar correctamente el valor de C.
- **C4(ai)** Asignar (**1 pto**) por determinar correctamente el valor de $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$.
- **C5(ai)** Asignar (**1 pto**) por determinar correctamente el valor de $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}$.
- **C6(ai)** Asignar (**1 pto**) por determinar correctamente el valor de $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$.

- **C1(aii)** Asignar (**2 pto**) por integrar por partes correctamente tomando $u = \arcsin(x)$ y $v' = x$.
- **C2(aii)** Asignar (**1 pto**) por hacer correctamente el cambio de variable $x = \sin(x)$ o $x = \cos(x)$ en la integral $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$
- **C3(aii)** Asignar (**2 pto**) por calcular correctamente la integral $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ obteniendo una expresión en la variable x.
- **C4(aii)** Asignar (**1 pto**) por que aparezca la constante de integración C, en el resultado final de integracción. Este puntaje se asignará independientemente si el estudiante comete algún error de cálculo.

- **C1(bi)** Asignar (**2 pto**) por escribir correctamente la integral que representa el área de la región en cuestión.
- **C2(bi)** Asignar (**2 pto**) por calcular correctamente la integral que representa el área.

- **C1(bii)** Asignar (**2 pto**) por escribir correctamente la integral que representa el volumen de la región en cuestión.
- **C2(bi)** Asignar (**2 pto**) por calcular correctamente la integral que representa el volumen.

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular y/o relojes inteligente prendidos