Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre de 2024

Cálculo I ⋆ MAT1610

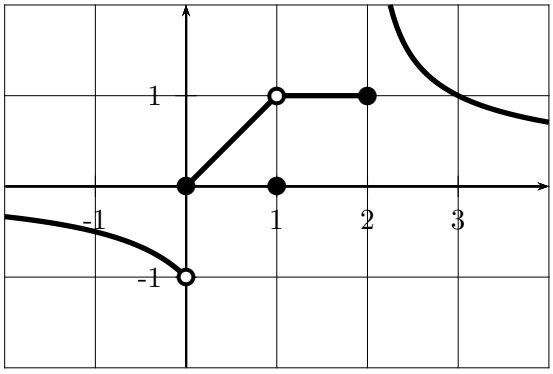
Interrogación 1

- El puntaje en la evaluación se entrega según pauta, siempre y cuando haya un desarrollo que justifique su respectiva solución y el desarrollo sea correcto.
- No se asignará puntaje diferente al establecido por la pauta.
- Errores de arrastre son sancionados con el puntaje hasta antes del primer error, salvo que la pauta especifique lo contrario.

1. *a*) **(8 ptos)** Usando las leyes de los límites y límites conocidos, calcule los siguientes límites.

   (i) $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{x^3+4x^2-12x}{x^2-3x+2}\right)^{1/4}$ (ii) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2+4}-2}{x\,\mathrm{sen}(x)}$

   b) **(6 ptos)** Sea f la función dada por la gráfica que se muestra abajo.



   Para cada uno de los siguientes límites, decida si existe o no existe. Justifique su respuesta.

   (i) $\lim_{x\to 0} f(x)$ (ii) $\lim_{x\to 1} f(x)$ (iii) $\lim_{x\to 2} f(x)$

Solución.

a) (i) Usaremos la propiedad que nos permite intercambiar límite con raíz, además de factorizar y simplificar la expresión raciona.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3+4x^2-12x}{x^2-3x+2}\right)^{1/4} &= \left(\lim_{x\to 2}\frac{x(x+6)\cancel{(x-2)}}{(x-1)\cancel{(x-2)}}\right)^{1/4}\\ &= \left(\lim_{x\to 2}\frac{x(x+6)}{x-1}\right)^{1/4}\\ &= \left(\frac{2(2+6)}{2-1}\right)^{1/4}\\ &= 2\end{aligned}$$

(ii) Comenzaremos racionalizando, y armando el límite notable $\lim_{x\to 0}\operatorname{sin}(x)/x$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^3+x^2+4}-2}{x\,\operatorname{sen}(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^2}{\left(\sqrt{x^3+x^2+4}+2\right)x\,\operatorname{sen}(x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x+1}{\left(\sqrt{x^3+x^2+4}+2\right)\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}\\ &= \frac{0+1}{\left(\sqrt{0^3+0^2+4}+2\right)\cdot 1}\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

b) (i) A partir de la gráfica se tiene que

$$-1 = \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

por lo que el límite no existe.

(ii) A partir de la gráfica se tiene que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

por lo que el límite existe, y es igual a 1.

(i) A partir de la gráfica se tiene que

$$2 = \lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$$

por lo que el límite no existe.

Evaluación.

- **C1(ai)** Asignar **(2 ptos)** por determinar una expresión simplificada para $\dfrac{x^3+4x^2-12x}{x^2-3x+2}$ en que el término $(x-2)$ se haya simplificado.
- **C2(ai)** Asignar **(2 ptos)** por obtener el valor del límite pedido. Este puntaje se asignará únicamente si se obtuvo el puntaje anterior.
- **C1(aii)** Asignar **(2 ptos)** por racionalizar (correctamente), haciendo desaparecer la raíz en el numerador.
- **C2(aii)** Asignar **(1 ptos)** por calcular (correctamente) un límite del tipo $\lim_{x\to 0}\operatorname{sin}(x)/x$ o $\lim_{x\to 0} x/\operatorname{sin}(x)$.
- **C3(aii)** Asignar **(1 ptos)** por calcular (correctamente) el valor del límite pedido. Este puntaje se asignará únicamente si se ha asignado el puntaje anterior.

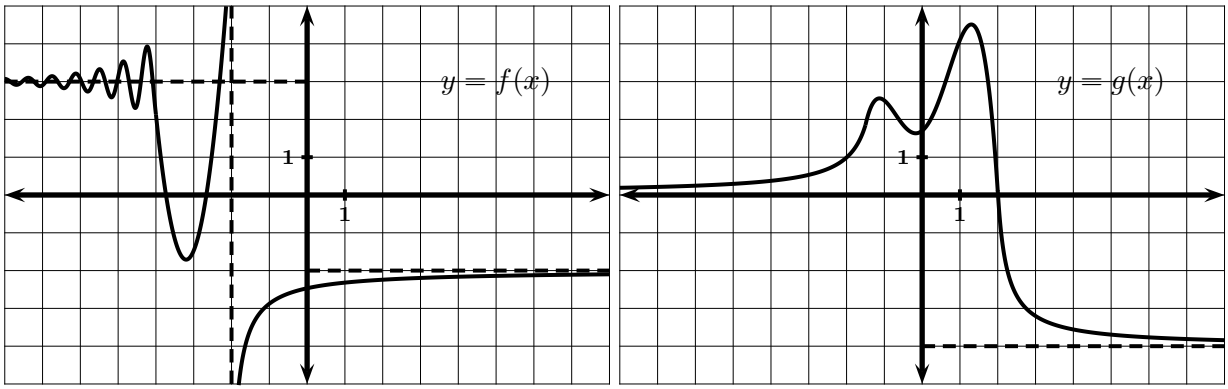
- **C1(bi)** Asignar **(2 ptos)** por decir y justificar que el límite no existe. En la justificación debe explicitar los valores de los límites laterales, y concluir que el límite no existe por consecuencia de ello. No se asigna puntaje si no hay justificación.
- **C1(bii)** Asignar **(2 ptos)** por decir y justificar que el límite existe. En la justificación debe explicitar los valores de los límites laterales, y concluir que el límite existe por consecuencia de ello. No se asigna puntaje si no hay justificación.
- **C1(biii)** Asignar **(2 ptos)** por decir y justificar que el límite no existe. En la justificación debe explicitar los valores de los límites laterales, y concluir que el límite no existe por consecuencia de ello. También es válido decir que el límite lateral derecho no existe, y concluir por tanto que el límite solicitado no existe. No se asigna puntaje si no hay justificación.

2. *a*) **(6 ptos)** Decida, en caso de existir, si

$$f(x) = \frac{x - |x|}{|x-1|}$$

tiene asíntota vertical en $x = 1$. Justifique su respuesta.

b) **(8 ptos)** A continuación se muestran las gráficas de f y g.



Determine, en caso de existir, las asíntotas horizontales de $h(x) = \dfrac{1 - f(x)}{g(x) + 2}$.

Solución.

a) Probaremos que f no tiene asíntota en $x = 1$, para ello probaremos que el límite existe cuando $x \to 1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{x - |x|}{|x-1|} \qquad\qquad x \approx 1 \quad \Rightarrow \quad x > 0 \quad \Rightarrow \quad |x| = x \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x - x}{|x-1|} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{0}{|x-1|} \\
&= \lim_{x\to 1} 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dado que el límite existe, no hay asíntota vertical en $x = 1$.

b) A partir de las gráficas de f y g se tiene que

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 3, \quad \lim_{x\to -\infty} g(x) = 0, \quad \lim_{x\to \infty} f(x) = -2, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to \infty} g(x) = -4$$

Luego, usando las leyes de los límites, tendremos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -\infty} h(x) &= \lim_{x\to -\infty} \frac{1 - f(x)}{g(x) + 2} = \frac{1 - (3)}{(0) + 2} = -1 \\
\lim_{x\to \infty} h(x) &= \lim_{x\to \infty} \frac{1 - f(x)}{g(x) + 2} = \frac{1 - (-2)}{(-4) + 2} = -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

De lo anterior, h tiene asíntotas horizontales: $y = -1$ en $-\infty$ e $y = -3/2$ en $+\infty$.

Evaluación.

- **C1(a)** Asignar **(2 ptos)** por evidenciar que $|x| = x$, cuando está calculando el límite o por justificación de que $x > 0$ ya que x está cerca de 1.
- **C2(a)** Asignar **(2 ptos)** por deducir que el límite es cero. Este puntaje se asignará siempre y cuando se haya asignado el puntaje anterior.
- **C2(a)** Asignar **(2 ptos)** por deducir que f no admite asíntota vertical. Este puntaje se asignará siempre y cuando se hayan asignados los puntajes anteriores.

- **C1(b)** Asignar **(1 ptos)** por escribir correctamente el valor de $\lim_{x \to -\infty} f(x)$
- **C2(b)** Asignar **(1 ptos)** por escribir correctamente el valor de $\lim_{x \to -\infty} g(x)$
- **C3(b)** Asignar **(2 ptos)** por escribir correctamente la ecuación de la asíntota horizontal en $-\infty$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se hayan obtenidos los puntajes de **C1(b)** y **C2(b)**.
- **C4(b)** Asignar **(1 ptos)** por escribir correctamente el valor de $\lim_{x \to \infty} f(x)$
- **C5(b)** Asignar **(1 ptos)** por escribir correctamente el valor de $\lim_{x \to \infty} g(x)$
- **C6(b)** Asignar **(2 ptos)** por escribir correctamente la ecuación de la asíntota horizontal en ∞. Este puntaje se asignará siempre y cuando se hayan obtenidos los puntajes de **C4(b)** y **C5(b)**

3. *a*) **(8 ptos)** Demuestre que la ecuación $x^3 + \sin(x) = -e^x$ tiene al menos una raíz real.

   b) **(8 ptos)** Determine una ecuación para la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$ en el punto $(0, f(0))$.

Solución.

a) Se define la función $f(x) = x^3 + \sin(x) + e^x$. Ahora verificamos que satisface las condiciones del TVI, sobre el intervalo $[-1, 0]$

- f es continua, ya que es suma de tres funciones continuas (sobre todo $\mathbb{R}$) sobre $[-1, 0]$.
- Podemos notar que

$$f(-1) = -1 - \sin(1) + e^{-1} < -1 + e^{-1} < 0$$

ya que $e^{-1} = \dfrac{1}{e} < 1$. Además, $f(0) = 1 > 0$.

Por lo anterior, f satisface el TVI sobre el intervalo $[-1, 0]$. De este modo, existe $c \in (-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$, es decir:

$$c^3 + \sin(c) + e^c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c^3 + \sin(c) = -e^c$$

b) Una ecuación para esta recta es $y - f(a) = f'(a)(x - a)$, donde $a = f(a) = 0$. Calculemos $f'(a) = f'(0)$ por definición.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{4h}{h^2+1}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4}{h^2+1} \\ &= 4 \end{aligned}$$

De lo anterior, una ecuación para la recta pedida es: $y = 4x$.

Evaluación.

- **C1(a)** Asignar **(2 ptos)** por definir una función, a la que aplicará el TVI. Esta función debe ser la diferencia entra las expresiones de la igualdad de la ecuación.
- **C2(a)** Asignar **(2 ptos)** por justificar por qué la función elegida es continua sobre el intervalo (cerrado) elegido. Si no entrega alguna justificación (por ejemplo suma de continuas) no se asignará el puntaje.
- **C3(a)** Asignar **(2 ptos)** por justificar por qué la función elegida cambia de signo en los extremos del intervalo. Esta puntaje se puede asignar independiente de haber obtenido el puntaje del criterio **C2(a)**.
- **C4(a)** Asignar **(2 ptos)** por concluir que la función elegida se hace cero en el intervalo abierto dado, citando el TVI. Este puntaje se asignará simpre y cuando se haya citando el TVI, y se hayan obtenido los puntajes de los criterios **C1(a)** y **C3(a)**.

- **C1(b)** Asignar **(2 ptos)** por determinar correctamente el valor de $f(0)$.
- **C2(b)** Asignar **(2 ptos)** por obtener correctamente una expresión para $f(h)/h$.
- **C3(b)** Asignar **(2 ptos)** por calcular correctamente $f'(0)$.
- **C4(b)** Asignar **(2 ptos)** por determinar correctamente una ecuación para la tangente pedida. Este puntaje se asignará siempre y cuando se hayan asignados los puntajes anteriores.

4. *a*) **(12 ptos)** Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & 0 < x \end{cases}$$

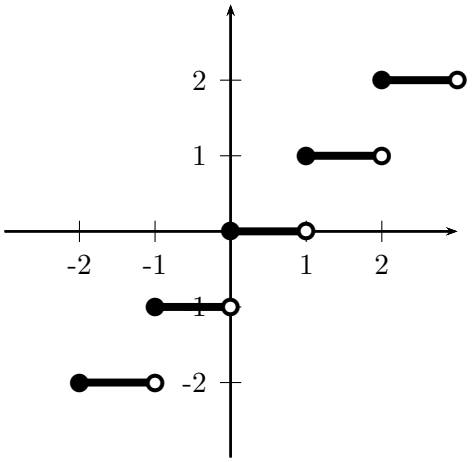
(i) Demuestre que f es continua en $x = 0$.

(ii) Demuestre que f es derivable en $x = 0$.

b) **(6 ptos)** Decida si el siguiente límite existe o no. En caso de existir deduzca su valor, probando su afirmación usando ε y δ.

$$\lim_{x\to 0}\Big[x \operatorname{sen}(x)\Big]$$

Nota. La gráfica de la función $[x]$, parte entera de x, es:



Solución.

a) (i) Debemos probar que $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

- $x < 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

- $x > 0$. Usaremos el Teorema del Sandwich.

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin(1/x) \leq 1 \quad &\Rightarrow \quad -x^2 \leq x^2 \sin(1/x) \leq x^2 \\ &\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} -x^2 \leq \lim_{x\to 0^+} x^2 \sin(1/x) \leq \lim_{x\to 0^+} x^2 \\ &\Rightarrow \quad 0 \leq \lim_{x\to 0^+} x^2 \sin(1/x) \leq 0 \end{aligned}$$

de donde se concluye que $\lim_{x\to 0} x^2 \sin(1/x) = 0$. Por lo anterior,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

lo que prueba la continuidad de f en $x = 0$.

(ii) Para demostrar que la derivada existe, calcularemos el valor de la derivada. Podemos notar que

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}$$

- $h < 0$.

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{0}{h} = 0$$

- $h > 0$. Usaremos el Teorema del Sandwich, para calcular este límite.

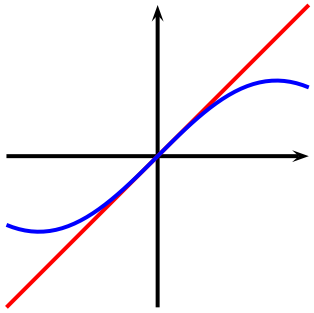
$$\begin{aligned} -1 \le \sin(1/h) \le 1 \quad &\Rightarrow \quad -h \le h\sin(1/h) \le h \\ &\Rightarrow \quad \lim_{h\to 0^+} -h \le \lim_{h\to 0^+} h\sin(1/x) \le \lim_{h\to 0^+} h \\ &\Rightarrow \quad 0 \le \lim_{h\to 0^+} h\sin(1/h) \le 0 \end{aligned}$$

Como los límites laterales existen y son iguales (e iguales a cero) se concluye que el límite existe y que $f'(0) = 0$.

b) Comenzaremos mostrando que $0 < x\sin(x) < 1$, para x cerca de 0. Eso nos permitirá afirmar que

$$\Big[x\sin(x)\Big] = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}\Big[x\sin(x)\Big] = 0$$

Para x cerca de cero se puede afirmar que $f(x) = x\sin(x)$ es positiva (no negativa), ya que las curvas $y = x$ e $y = \sin(x)$ tienen el mismo signo a la izquierda y a la derecha del cero.



Luego,

$$0 \le |\sin(x)| \le 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le |x\sin(x)| \le |x|$$

Dado que $x\sin(x) \ge 0$, tendremos que

$$0 \le x\sin(x) \le |x|$$

Si $-1 < x < 1$, entonces

$$0 < x\sin(x) \le |x| < 1 \quad \Rightarrow \quad \Big[x\sin(x)\Big] = 0$$

Luego, para todo $\varepsilon > 0$ podemos elegir (algún) $0 < \delta < 1$ ya que

$$|x - 0| < \delta \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\left|\Big[x\sin(x)\Big] - 0\right|}_{0} < \varepsilon$$

lo que prueba que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Evaluación.

- **C1(ai)** Asignar **(1 ptos)** por demostrar que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$.
- **C2(ai)** Asignar **(1 ptos)** por establecer la desigualdad $-x^2 \leq x^2 \sin(1/x) \leq x^2$, para $x > 0$.
- **C3(ai)** Asignar **(2 ptos)** por concluir que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se haya asignado el puntaje del criterio **C2(a)**.
- **C4(ai)** Asignar **(2 ptos)** por concluir que la función es continua en $x = 0$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se haya asignado el puntaje de todos los criterios anteriores.

- **C1(aii)** Asignar **(1 ptos)** por calcular correctamente $\lim_{h\to 0^-} f(h)/h = 0$.
- **C2(aii)** Asignar **(1 ptos)** por establecer la desigualdad $-h \leq h \sin(1/x) \leq h$, con $h > 0$. Este puntaje se asignará siempre y cuando el estudiante haya escrito que $h > 0$
- **C3(aii)** Asignar **(2 ptos)** por determinar el valor del límite lateral derecho, usando el Teorema del Sandwich. Este puntaje se asignará siempre y cuando se haya asignado el puntaje del criterio **C2(a)**.
- **C4(aii)** Asignar **(2 ptos)** por concluir que la función es derivable en $x = 0$ y exhibir el valor de $f'(0)$. Este puntaje se asignará siempre y cuando se haya asignado el puntaje de todos los criterios anteriores.

- **C1(b)** Asignar **(2 ptos)** por justificar correctamente que $x \sin(x) \geq 0$ para x suficientemente cerca de cero.
- **C2(b)** Asignar **(2 ptos)** por justificar correctamente que $[x \sin(x)] = 0$ para x suficientemente cerca de cero.
- **C3(b)** Asignar **(2 ptos)** por encontrar, justificadamente, el $\delta > 0$ para el cuál se cumple la definición de límite.

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular y/o relojes inteligente prendidos