Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre de 2023

Cálculo I ⋆ MAT1610

Interrogación 3

1. **(10 ptos)** Considere la función

$$f(x) = x - \frac{x^2}{6} - \frac{2}{3}\ln(x)$$

tal que

$$f'(x) = -\frac{(x-1)(x-2)}{3x} \qquad \text{y} \qquad f''(x) = -\frac{x^2-2}{3x^2}$$

a) Determine los intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento.

b) Determine los valores de mínimos y máximos locales y globales.

c) Determine los intervalos donde f es cóncava hacia arriba y los intervalos donde f es cóncava hacia abajo.

d) Determine, en caso de existir, los puntos de inflexión de f.

e) Esboce la gráfica de f en su dominio. Explicite su dominio.

Solución.

a) Podemos notar que el dominio de f son los reales positivos. De este modo, una tabla de signos para f' está restringida sobre el intervalo $(0,\infty)$. Una tabla de signos para f' es:

	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
x	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$

De lo anterior se desprende que: f es decreciente en $(0,1)$ y en $(2,\infty)$, y f es creciente en $(1,2)$.

b) A partir de la tabla, y el dominio de f, tendremos que $f(1) = 5/6$ corresponde a un mínimo local, mientras que $f(2) = 4/3 - (2/3)\ln(2)$ es un máximo local. Respecto a los valores extremos globales,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

por lo que f no admite valores extremos globales.

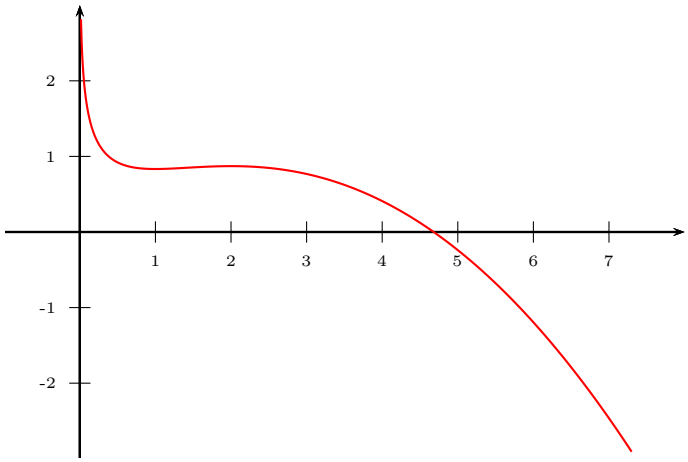
c) Para determinar los intervalos de concavidad, basta con determinar el signo de la segunda derivada en el dominio de f. Una tabla de signos para f'' es:

	$(0,\sqrt{2})$	$(\sqrt{2},\infty)$
x^2	$+$	$+$
$x+\sqrt{2}$	$+$	$+$
$x-\sqrt{2}$	$-$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$

De lo anterior, f es cóncava hacia arriba sobre el intervalo $(0, \sqrt{2})$ y f es cóncava hacia abajo sobre el intervalo $(\sqrt{2}, \infty)$.

d) Dado que la función es continua en $x = \sqrt{2}$, y en este número se produce un cambio de concavidad, podemos afirmar que la gráfica de f posee un punto de inflexión cuyas coordenada son: $(\sqrt{2}, -1/3 + \sqrt{2} - \ln(2)/3)$.

e) El dominio de f es $(0, \infty)$, y su gráfica está dada por:



Evaluación.

- **(a) Criterio 1** Asignar (**0.5 pto**) por identificar que el signo de la derivada se debe analizar sobre el intervalo $(0, \infty)$. Eso puede ser explícito, identificando en el desarrollo de la parte (a) el dominio de f o que en el desarrollo de su respuesta no se contempla al intervalo o partes del intervalo $(-\infty, 0]$, por ejemplo en la tabla de signos. Si el estudiante identifica el dominio de f en otra parte, por ejemplo en (e), no se asignará este puntaje.
- **(a) Criterio 2** Asignar (**0.5 pto**) por decir que f es decreciente en $(0, 1)$ o en $(0, 1]$. Este puntaje se asignará únicamente si hay un desarrollo claro que justifica su respuesta.
- **(a) Criterio 3** Asignar (**0.5 pto**) por decir que f es decreciente en $(2, \infty)$ o en $[2, \infty)$. Este puntaje se asignará únicamente si hay un desarrollo claro que justifica su respuesta.
- **(a) Criterio 4** Asignar (**0.5 pto**) por decir que f es creciente en $(1, 2)$ o en $[1, 2]$. Este puntaje se asignará únicamente si hay un desarrollo claro que justifica su respuesta.

- **(b) Criterio 1** Asignar (**0.5 pto**) por calcular $f(1)$ y decir que este valor corresponde a un mínimo local de f. Solo se asignará el puntaje si se explicita que es mínimo local y calcula el valor de $f(1)$.
- **(b) Criterio 2** Asignar (**0.5 pto**) por calcular $f(2)$ y decir que este valor corresponde a un máximo local de f. Solo se asignará el puntaje si se explicita que es máximo local y calcula el valor de $f(2)$.
- **(b) Criterio 3** Asignar (**0.5 pto**) por justificar que f no admite mínimo global. Esto se justifica evidenciando que f no admite cota inferior o equivalentemente $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.
- **(b) Criterio 4** Asignar (**0.5 pto**) por justificar que f no admite máximo global. Esto se justifica evidenciando que f no admite cota superior o equivalentemente $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$.

- **(c) Criterio 1** Asignar (**0.5 pto**) por decir que f es cóncava hacia arriba en $(0, \sqrt{2})$ o en $(0, \sqrt{2}]$. Este puntaje se asignará únicamente si hay un desarrollo claro que justifica su respuesta.
- **(c) Criterio 2** Asignar (**0.5 pto**) por decir que f es cóncava hacia abajo en $(\sqrt{2}, \infty)$ o en $(0, \sqrt{2}]$. Este puntaje se asignará únicamente si hay un desarrollo claro que justifica su respuesta.

- **(d) Criterio 1** Asignar (**1 pto**) por determinar ambas coordenadas del punto de inflexión.

- **(e) Criterio 1** Asignar (**1 pto**) si la gráfica sobre el intervalo $(0, 1)$ es positiva, decreciente y cóncava hacia arriba.
- **(e) Criterio 2** Asignar (**1 pto**) si la gráfica sobre el intervalo $(1, \sqrt{2})$ es positiva, creciente y cóncava hacia arriba.
- **(e) Criterio 3** Asignar (**1 pto**) si la gráfica sobre el intervalo $(\sqrt{2}, 2)$ es positiva, creciente y cóncava hacia abajo.
- **(e) Criterio 4** Asignar (**1 pto**) si la gráfica sobre el intervalo $(2, \infty)$ cruza el eje X de positiva a negativa, es decreciente y cóncava hacia abajo.

2. *a*) **(3 ptos)** Calcule las asíntotas oblicuas de

$$f(x) = 2x + \frac{x}{|x|+1}$$

b) **(3 ptos)** Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+\cos(x)\right)^{1/x^2}$

Solución.

a) **Asíntota oblicua en $-\infty$:** $y = a_- x + b_-$

$$a_- = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{1}{|x|+1}\right) = 2$$
$$b_- = \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-ax\big) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x+1} = -1$$

De lo anterior, la asíntota oblicua en $-\infty$ tiene ecuación $y = 2x-1$.

b) **Asíntota oblicua en ∞:** $y = a_+ x + b_+$

$$a_+ = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{|x|+1}\right) = 2$$
$$b_+ = \lim_{x\to\infty}\big(f(x)-ax\big) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1} = 1$$

De lo anterior, la asíntota oblicua en ∞ tiene ecuación $y = 2x+1$.

c) Aplicamos logaritmo natural al límite, obteniendo

$$\begin{aligned}
\ln(L) &= \lim_{x\to0}\frac{\ln(x^2+\cos(x))}{x^2}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{\dfrac{2x-\sin(x)}{x^2+\cos(x)}}{2x} && \text{(L'Hopital)}\\
&= \lim_{x\to0}\left(2-\frac{\sin(x)}{2x}\right)\cdot\frac{1}{x^2+\cos(x)}\\
&= \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{0^2+1}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $L = \sqrt{e}$.

Evaluación. El puntaje se asignará únicamente si hay un desarrollo adecuado para cada resultado.

- **(a) Criterio 1** Asignar (**0.5 pto**) por determinar el valor de a_-.
- **(a) Criterio 2** Asignar (**0.5 pto**) por determinar el valor de b_-.
- **(a) Criterio 3** Asignar (**0.5 pto**) por determinar la ecuación de la asíntota oblicua en $-\infty$.
- **(a) Criterio 4** Asignar (**0.5 pto**) por determinar el valor de a_+.
- **(a) Criterio 5** Asignar (**0.5 pto**) por determinar el valor de b_+.
- **(a) Criterio 6** Asignar (**0.5 pto**) por determinar la ecuación de la asíntota oblicua en ∞.

- **(b) Criterio 1** Asignar (**0.5 pto**) por aplicar logaritmo natural (ln o log) al límite que se quiere calcular.
- **(b) Criterio 2** Asignar (**1 pto**) por aplicar por primera vez L'Hopital al cociente entre $ln(x^2+\cos(x))$ y x^2.
- **(b) Criterio 3** Asignar (**1 pto**) por calcular el límite que se obtiene luego de aplicar por primera vez L'Hopital.
- **(b) Criterio 4** Asignar (**0.5 pto**) por obtener el valor de L.

3. *a*) **(3 ptos)** Use la propiedad de comparación para demostrar que

$$\int_0^1 xe^{-x}\,dx \leq \frac{1}{2}$$

b) **(3 ptos)** Dada la función

$$g(x) = \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{1}{t^6+1}dt$$

Calcule $g'(2)$.

Solución.

a) **Alternativa 1.** Sobre el intervalo $[0,1]$ la función e^{-x} es dereciente, luego $e^{-x} \leq e^{-0} = 1$. De la afirmación anterior se desprende que para todo $x \in [0,1]$ se cumple:

$$xe^{-x} \leq x \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 xe^{-x}\,dx \leq \int_0^1 x\,dx$$

donde el valor de esta última integral es $1/2$, ya que corresponde al área de un triángulo rectángulo isósceles de cateto 1.

Alternativa 2. Considere la función $f(x) = xe^{-x}$, sobre el intervalo $[0,1]$. Usando el método del intervalo cerrado sobre este intervalo para determinar los valores extremos obtendremos que f tiene un único número crítico dado por $x = 1$, ya que $f'(x) = (x-1)e^{-x}$. Evaluando en el crítico y en los extremos: $f(0) = 0$, $f(1) = e^{-1}$. De lo anterior, el máximo global de f sobre el intervalo es: e^{-1}, luego,

$$xe^{-x} \leq e^{-1} \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 xe^{-x}\,dx \leq \int_0^1 e^{-1}\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}$$

b) Usando el teorema fundamental del cálculo, combinado con la regla de la cadena, tendremos

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^1 \frac{1}{t^6+1}dt = -\frac{d}{dx}\int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{t^6+1}dt = -\frac{1}{x^3+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Luego, $g'(2) = -\frac{1}{18\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{36}$.

Evaluación. Los puntos se asignarán siempre y cuando hay un desarrollo que justifique su respuesta.

- **(a) Criterio 1** Si el estudiante sigue la **alternativa 1**, Asignar (**1 pto**) por justificar que $xe^{-x} \leq x$ ya que e^{-x} es decreciente sobre el intervalo $[0,1]$. Si el estudiante sigue la **alternativa 2**, por usar el criterio del intervalo cerrado para determinar los valores extremos globales de f.
- **(a) Criterio 2** Si el estudiante sigue la **alternativa 1**, Asignar (**1 pto**) por obtener la desigualdad $\int_0^1 xe^{-x}\,dx \leq \int_0^1 x\,dx$. Si el estudiante sigue la **alternativa 2**, por concluir que f tiene máximo global $f(1) = e^{-1}$.
- **(a) Criterio 3** Si el estudiante sigue la **alternativa 1**, Asignar (**1 pto**) por decir $\int_0^1 x\,dx = 1/2$ interpretando la integral como área, no se asignará puntaje si calcula la integral usando teorema del cambio neto. Si el estudiante sigue la **alternativa 2**, por obtener la desigualdad $\int_0^1 xe^{-x}\,dx \leq 1/2$ como consecuencia de los cálculos anteriores: $e^{-1} < 1/2$.
- **(b) Criterio 1** Asignar (**2 pto**) por determinar la derivada de g. Si el estudiante equivoca solo en el signo, obteniendo $g'(x)$, asignar (**1 pto**).
- **(b) Criterio 2** Asignar (**1 pto**) por determinar $g'(2)$. Si el estudiante obtiene $g'(x) = \frac{1}{2(x^3+1)\sqrt{x}}$, pero calcula correctamente $g'(2)$, para la g' encontrada, asignar (**0.5 pto**).

4. **(6 ptos)** Un vehículo transita por la carretera a $30\,m/s$ cuando el conductor ve un obstáculo inmóvil en el camino a cierta distancia. Se demora medio segundo en comenzar a frenar aplicando una desaceleración constante de $4m/s^2$ hasta detenerse justo frente al obstáculo. ¿Cuál es la distancia a la que se encontraba el obstáculo cuando lo vio el conductor?

Solución. Sea $x(t)$ la posición del vehículo en el instante de tiempo t, con t medido en segundos, $x(0) = 0$ y $t = 0$ el instante que el conductor vio el objeto. Si x' y x'' corresponden a la velocidad y aceleración del vehículo, respectivamente, entonces

$$x''(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 1/2 \\ -4 & t \ge 1/2 \end{cases}$$

$$x'(t) = \begin{cases} 30 & 0 \le t < 1/2 \\ -4(t-1/2)+30 & t \ge 1/2 \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} 30t & 0 \le t < 1/2 \\ -2(t-1/2)^2 + 30(t-1/2) + 15 & t \ge 1/2 \end{cases}$$

Si $t_0 > 1/2$ es el instante en que logra detenerse (justo frente al objeto), entonces $x'(t_0) = 0$ y por tanto

$$-4(t_0 - 1/2) + 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 8$$

Entonces la distancia a la que se encontraba el obstáculo es $x(8) = 255/2 = 127{,}5$ metros.

Evaluación.

- **Criterio 1** Asignar (**1 pto**) por determinar una fórmula para $x''(t)$, con $t \ge 1/2$.
- **Criterio 2** Asignar (**1.5 pto**) por determinar una fórmula para $x'(t)$, con $t \ge 1/2$.
- **Criterio 3** Asignar (**1.5 pto**) por determinar una fórmula para $x(t)$, con $t \ge 1/2$.
- **Criterio 4** Asignar (**1 pto**) por determinar el instante t_0 en que el vehículo se detuvo. Este puntaje se asignará únicamente si obtuvo correctamente la fórmula de $x'(t)$, para $t > 1/2$.
- **Criterio 5** Asignar (**1 pto**) por determinar la distancia pedida, como calculo de $x(t_0)$.

Nota. Es posible que el estudiante tome $t = 0$ como el instante en que se comienza a aplicar la aceleración. En tal caso $x''(t) = -4$, $x'(t) = -4t + 30$, $x(t) = -2t^2 + 30t$, $t_0 = 15/2$ y la distancia pedida sería $x(t_0) + 15$. En este caso, aplicar los criterios anteriores para asignar el puntaje.

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular y/o relojes inteligente prendidos