Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Primer Semestre 2026

Introducción al Cálculo - MAT1107
Interrogación N°8

Pregunta Nº1. Sea $(s_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ la sucesión definida a través de la siguiente recurrencia:

$$s_1 = 1\,, \qquad s_{n+1} = \sqrt{\frac{9+s_n^2}{2}} \qquad \forall n \geq 1\,.$$

(a) [2 puntos] Demuestre que $(s_n)_{n\geq 1}$ es acotada superiormente.

(b) [2 puntos] Demuestre que $(s_n)_{n\geq 1}$ es creciente.

(c) [2 puntos] Concluya que $(s_n)_{n\geq 1}$ es convergente, y calcule su límite.

Solución.

(a) Demostremos, por inducción, que $s_n \leq 3$ para todo entero $n \geq 1$. El caso base es evidente pues, por definición, $s_1 = 1$. Supongamos, entonces, que $s_n \leq 3$ para un cierto $n \geq 1$; sigue que:

$$s_{n+1} = \sqrt{\frac{9+s_n^2}{2}} \leq \sqrt{\frac{9+9}{2}} = 3\,,$$

lo cual concluye la demostración.

(b) Demostremos, por inducción, que $s_{n+1} \geq s_n$ para todo entero $n \geq 1$. Notando que $s_2 = \sqrt{5}$, el caso base $s_2 \geq s_1$ se verifica. Supongamos, entonces, que $s_{n+1} \geq s_n$ para un cierto $n \geq 1$; como $s_k \geq 0$ para todo $k \geq 1$, sigue que:

$$s_{n+1}^2 \geq s_n^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{9+s_{n+1}^2}{2} \geq \frac{9+s_n^2}{2} \quad \Longrightarrow \sqrt{\frac{9+s_{n+1}^2}{2}} \geq \sqrt{\frac{9+s_n^2}{2}} \quad \Longrightarrow \quad s_{n+2} \geq s_{n+1}\,,$$

lo cual concluye la demostración.

(c) Al ser una sucesión creciente y acotada superiormente, sabemos que $(s_n)_{n\geq 1}$ es convergente. Denotando por $L \in \mathbb{R}$ a su límite, tomamos el límite cuando $n \to +\infty$ en la fórmula recursiva de $(s_n)_{n\geq 1}$ para deducir que:

$$L = \sqrt{\frac{9+L^2}{2}} \quad \Longrightarrow \quad L^2 = 9 \quad \Longrightarrow \quad L = 3\,,$$

puesto que $s_k \geq 0$ para todo $k \geq 1$.

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº1.

(CC1) [(a)] 2 puntos por demostrar que $(s_n)_{n\geq 1}$ es acotada superiormente por 3.

(CC2) [(b)] 2 puntos por demostrar que $(s_n)_{n\geq 1}$ es creciente.

(CC3) [(c)] 1 punto por justificar que la sucesión $(s_n)_{n\geq 1}$ es convergente, al ser creciente y acotada superiormente.

(CC4) [(c)] 1 punto por calcular correctamente el valor de L (justificando que $L \geq 0$).

Pregunta Nº2. Calcule los siguientes límites:

(a) [3 puntos] $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-4}\right)^{n-2}$.

(b) [3 puntos] $\lim_{n\to+\infty}\frac{n!+3^n}{(n+1)!}$.

Solución.

(a) Para todo entero $n \geq 2$ se tiene lo siguiente:

$$\left(\frac{3n+1}{3n-4}\right)^{n-2} = \left(1+\frac{5}{3n-4}\right)^{n-2} = \left(1+\frac{1}{\frac{3n-4}{5}}\right)^{n-2} = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{3n-4}{5}}\right)^{\frac{3n-4}{5}}\right]^{\frac{5(n-2)}{3n-4}}. \tag{E1}$$

Definamos $a_k \doteq \frac{3k-4}{5}$ para todo $k \geq 1$, de modo tal que $\lim_{k\to+\infty} a_k = +\infty$, y así:

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)^{a_k} = e\,. \tag{E2}$$

Como $\lim_{k\to+\infty}\frac{5(k-2)}{3k-4} = \frac{5}{3}$, por álgebra de limites se concluye que:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-4}\right)^{n-2} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right]^{\frac{5(n-2)}{3n-4}} = e^{5/3}\,.$$

(b) Para todo entero $n \geq 1$ se tiene lo siguiente:

$$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\,,$$

y así:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = 0\,. \tag{E3}$$

Por otra parte, al ser conocido el siguiente límite:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n}{n!} = 0\,, \tag{LC}$$

sigue, por álgebra de límites, que:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{3^n}{n!}\frac{1}{n+1} = 0\cdot 0 = 0\,. \tag{E4}$$

Finalmente, por álgebra de límites se concluye que:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!+3^n}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n+1)!} + \lim_{n\to+\infty}\frac{3^n}{(n+1)!} = 0\,.$$

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº2.

(CC1) [(a)] 1 punto por re-escribir el límite propuesto en la forma (E1).

(CC2) [(a)] 1 punto por calcular el límite en (E2).

(CC3) [(a)] 1 punto por calcular correctamente el valor del límite propuesto, apelando al álgebra de límites.

(CC4) [(b)] 1 punto por calcular el límite en (E3).

(CC5) [(b)] 1 punto por calcular el límite en (E4) (se debe justificar, apelando al límite relevante (LC), y al álgebra de límites).

(CC6) [(b)] 1 punto por calcular correctamente el valor del límite propuesto, apelando al álgebra de límites.