Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Primer Semestre 2026

**Introducción al Cálculo - MAT1107**
**Interrogación N°7**

**Pregunta Nº1.** Calcule los siguientes límites:

(a) [3 puntos] $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n-\operatorname{sen}(n)}{n^2-16}$.

(b) [3 puntos] $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$, siendo $a>b>0$ dos números reales cualesquiera.

**Solución.**

(a) Para todo entero $n \geq 5$ se tiene lo siguiente:

$$\frac{n-\operatorname{sen}(n)}{n^2-16} = \frac{n}{n^2-16} - \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2-16}\,.$$

Por una parte, notamos que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2-16} = 0\,.$$

Por otra parte, dado que $-1 \leq \operatorname{sen}(n) \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, sigue que:

$$-\frac{1}{n^2-16} \leq \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2-16} \leq \frac{1}{n^2-16} \qquad \forall n \geq 5\,.$$

El Teorema del Sandwich implica entonces que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2-16} = 0\,.$$

Por álgebra de limites se concluye que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-\operatorname{sen}(n)}{n^2-16} = 0\,.$$

(b) Para todo entero $n \geq 1$ se tiene lo siguiente:

$$\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n} = \frac{a^{n+1}(1+(\frac{b}{a})^{n+1})}{a^n(1+(\frac{b}{a})^n)} = a\frac{1+(\frac{b}{a})^{n+1}}{1+(\frac{b}{a})^n}\,. \tag{E}$$

Dado que $a>b>0$, sigue que:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^{n} = 0\,,$$

de donde se concluye, en base al álgebra de límites, que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n} = a\,.$$

**Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº1.**

(CC1) [(a)] 1 punto por justificar que $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2-16} = 0$.

(CC2) [(a)] 1 punto por justificar, en base al Teorema del Sandwich, que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\text{sen}(n)}{n^2-16} = 0$.

(CC3) [(a)] 1 punto por calcular correctamente el valor del límite propuesto, apelando al álgebra de límites.

(CC4) [(b)] 1 punto por escribir la igualdad (E).

(CC5) [(b)] 1 punto por invocar el límite conocido $\lim_{n\to+\infty} r^n = 0$ para todo $r \in (-1, 1)$.

(CC6) [(b)] 1 punto por calcular correctamente el valor del límite propuesto, apelando al álgebra de límites.

**Pregunta Nº2.** Considere las sucesiones $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ definidas por:

$$a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n} \qquad \text{y} \qquad b_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n} \qquad \forall n \geq 1\,.$$

(a) [4 puntos] Demuestre que

$$3 \leq a_n \leq 3\sqrt[n]{2} \qquad \text{y} \qquad 0 \leq b_n \leq \frac{n}{n^2+1} \qquad \forall n \geq 1\,.$$

(b) [2 puntos] Concluya que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 3 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = 0\,.$$

**Solución.**

(a) Para todo entero $n \geq 1$ se tiene lo siguiente:

$$3^n \leq 2^n + 3^n \leq 3^n + 3^n = 2 \cdot 3^n\,.$$

Tomando la raíz $n$-ésima en la desigualdad anterior deducimos que:

$$3 \leq a_n \leq 3\sqrt[n]{2} \qquad \forall n \geq 1\,.$$

Por su parte, para todo par de enteros $n, k \geq 1$ se tiene que $n^2 + k^2 \geq n^2 + 1$, por lo que:

$$0 \leq b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1} \qquad \forall n \geq 1\,.$$

(b) Recordemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0\,. \tag{LC}$$

Las desigualdades mostradas en el inciso (a) permiten obtener los límites propuestos, gracias al Teorema del Sandwich.

**Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº2.**

(CC1) [(a)] 2 puntos por demostrar que $3 \leq a_n \leq 3\sqrt[n]{2}$ para todo $n \geq 1$.

(CC2) [(a)] 2 puntos por demostrar que $0 \leq b_n \leq \frac{n}{n^2+1}$ para todo $n \geq 1$.

(CC3) [(b)] 1 punto por escribir los límites conocidos en (LC).

(CC4) [(b)] 1 punto por apelar al Teorema del Sandwich y concluir la demostración de ambos límites.