Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Primer Semestre 2026

Introducción al Cálculo - MAT1107
Interrogación N°6

Pregunta Nº1. Calcule los siguientes límites:

(a) [3 puntos] $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{n\sqrt{n}-3}$.

(b) [3 puntos] $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2-n+1}-n\right)$.

Solución.

(a) Para todo entero $n \geq 1$ se tiene lo siguiente:

$$\frac{n-1}{n\sqrt{n}-3} = \frac{n-1}{n\sqrt{n}-3} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{n}-\frac{3}{n}}, \tag{1}$$

de donde se deduce que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n\sqrt{n}-3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{n}-\frac{3}{n}} = \frac{1}{\infty} = 0\,.$$

(b) Para todo entero $n \geq 1$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2-n+1}-n &= \left(\sqrt{n^2-n+1}-n\right)\frac{\sqrt{n^2-n+1}+n}{\sqrt{n^2-n+1}+n} \\
&= \frac{n^2-n+1-n^2}{\sqrt{n^2-n+1}+n} \\
&= \frac{-n+1}{\sqrt{n^2-n+1}+n} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \\
&= \frac{-1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1},
\end{aligned} \tag{2}$$

de donde se deduce que:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2-n+1}-n\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{-1+0}{\sqrt{1-0+0}+1} = -\frac{1}{2}\,.$$

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº1.

(CC1) [(a)] 2 puntos por multiplicar la expresión $\dfrac{n-1}{n\sqrt{n}-3}$ por $\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$, llegando a la expresión (1).

(CC2) [(a)] 1 punto por calcular correctamente el límite propuesto, a partir de la expresión (1).

(CC3) [(b)] 2 puntos por multiplicar la expresión $\sqrt{n^2-n+1}-n$ por $\dfrac{\sqrt{n^2-n+1}+n}{\sqrt{n^2-n+1}+n}$, y posteriormente por $\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$, llegando a la expresión (2).

(CC4) [(b)] 1 punto por calcular correctamente el límite propuesto, a partir de la expresión (2).

Pregunta Nº2. Demuestre, utilizando la definición de límite, que

(a) [3 puntos] $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n-1} = 1.$

(b) [3 puntos] $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{2n+1}{n}} = \sqrt{2}.$

Solución.

(a) Debemos demostrar que:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \geq 2)(\forall n \geq n_0) \ \left|\frac{n+1}{n-1} - 1\right| < \varepsilon\,.$$

Ahora bien, para todo entero $n \geq 2$ se tiene lo siguiente:

$$\left|\frac{n+1}{n-1} - 1\right| = \left|\frac{n+1-n+1}{n-1}\right| = \frac{2}{n-1}\,.$$

Luego, dado cualquier $\varepsilon > 0$, debemos demostrar que existe un entero $n_0 \geq 2$ tal que

$$(\forall n \geq n_0) \ \left|\frac{n+1}{n-1} - 1\right| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall n \geq n_0) \ \frac{2}{n-1} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall n \geq n_0) \ \frac{2}{\varepsilon} + 1 < n\,. \tag{3}$$

La propiedad arquimediana de los números reales garantiza la existencia de tal entero $n_0 \geq 2$.

(b) Debemos demostrar que:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \geq 1)(\forall n \geq n_0) \ \left|\sqrt{\frac{2n+1}{n}} - \sqrt{2}\right| < \varepsilon\,.$$

Ahora bien, para todo entero $n \geq 1$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{\frac{2n+1}{n}} - \sqrt{2}\right| &= \left|\sqrt{2+\frac{1}{n}} - \sqrt{2}\right| \\
&= \left|\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}} - \sqrt{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2+\frac{1}{n}} + \sqrt{2}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}} + \sqrt{2}}\right| \\
&= \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}} + \sqrt{2}} \\
&\leq \frac{1}{n}\,.
\end{aligned}$$

Luego, dado cualquier $\varepsilon > 0$, basta demostrar que existe un entero $n_0 \geq 1$ tal que

$$(\forall n \geq n_0) \ \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall n \geq n_0) \ \frac{1}{\varepsilon} < n\,. \tag{4}$$

La propiedad arquimediana de los números reales garantiza la existencia de tal entero $n_0 \geq 1$.

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº2.

(CC1) [(a)] 1 punto por demostrar que $\left|\dfrac{n+1}{n-1}-1\right| = \dfrac{2}{n-1}$ para todo $n \geq 2$.

(CC2) [(a)] 1 punto por explicar, en base a las equivalencias (3), que basta hallar $n_0 \geq 2$ tal que $\dfrac{2}{\varepsilon}+1 < n$ para todo $n \geq n_0$.

(CC3) [(a)] 1 punto por invocar la propiedad arquimediana y concluir la demostración.

(CC4) [(b)] 1 punto por demostrar que $\left|\sqrt{\dfrac{2n+1}{n}}-\sqrt{2}\right| \leq \dfrac{1}{n}$ para todo $n \geq 1$.

(CC5) [(b)] 1 punto por explicar, en base a las equivalencias (4), que basta hallar $n_0 \geq 1$ tal que $\dfrac{1}{\varepsilon} < n$ para todo $n \geq n_0$.

(CC6) [(b)] 1 punto por invocar la propiedad arquimediana y concluir la demostración.