Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Primer Semestre 2026

Introducción al Cálculo - MAT1107
Interrogación N°5

Pregunta Nº1. Considere la función $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida a través de la siguiente asignación:

$$f(x) \doteq \frac{x+1}{|x|-1} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}\,.$$

(a) [2 puntos] Demuestre que, considerando a $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ como dominio y a $\mathbb{R}$ como codominio, f no es inyectiva ni epiyectiva.

(b) [2 puntos] Determine los dos mayores conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tales que $f : A \longrightarrow B$ resulta ser una función biyectiva.

(c) [2 puntos] Determine la función inversa $f^{-1} : B \longrightarrow A$, siendo $A, B \subseteq \mathbb{R}$ los conjuntos hallados en el inciso (b).

Solución.

(a) Conviene expresar la asignación de f de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } \; x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)\,; \\ \dfrac{x+1}{x-1} & \text{si } \; x \in [0, 1) \cup (1, +\infty)\,. \end{cases} \tag{F}$$

Luego, f no es inyectiva, pues $f(x) = -1$ para todo $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$. Por otra parte, notemos que $1 \notin \text{Rec}(f)$; en efecto, si existiese $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ tal que $f(x) = 1$, entonces necesariamente debe cumplirse que $x \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$ y que

$$\frac{x+1}{x-1} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x + 1 = x - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 = -1\,,$$

lo cual es absurdo. Por ende, f no es epiyectiva al considerar $\mathbb{R}$ como codominio.

(b) Considerando la expresión (F), sean $a, b \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$ tales que

$$f(a) = f(b) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a+1}{a-1} = \frac{b+1}{b-1} \quad \Longleftrightarrow \quad ab - a + b - 1 = ab + a - b - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a = b\,,$$

por lo que f resulta ser inyectiva en $[0, 1) \cup (1, +\infty)$. Dado que f es constante en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, el conjunto más grande en el que f es inyectiva es

$$A \doteq [0, 1) \cup (1, +\infty)\,.$$

Ahora sólo debemos determinar el recorrido de f, tomando a A como su dominio. Recordando que $1 \notin f(A)$, notamos que:

$$\begin{aligned} y \in f(A) &\iff (\exists x \in A)\ \ y = f(x) \\ &\iff (\exists x \in A)\ \ y = \frac{x+1}{x-1} \\ &\iff (\exists x \in A)\ \ x = \frac{y+1}{y-1} \\ &\iff \left(0 \leq \frac{y+1}{y-1} < 1\right) \quad \vee \quad \left(\frac{y+1}{y-1} > 1\right) \\ &\iff y \in (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)\,. \end{aligned}$$

Por ende, poniendo

$$B \doteq (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)\,,$$

sigue que la restricción $f : A \longrightarrow B$ es biyectiva.

(c) Se deduce, en base al desarrollo del inciso (b), que la función inversa $f^{-1} : B \longrightarrow A$ queda definida como

$$f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1} \qquad \forall y \in B\,.$$

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº1.

(CC1) [(a)] 1 punto por demostrar que f no es inyectiva en $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ (basta exhibir un contra-ejemplo, no es necesario argumentar exactamente como hemos hecho en esta pauta).

(CC2) [(a)] 1 punto por demostrar que f no es epiyectiva al considerar $\mathbb{R}$ como codominio (basta exhibir un contra-ejemplo).

(CC3) [(b)] 1 punto por determinar el conjunto A (se debe justificar la respuesta).

(CC4) [(b)] 1 punto por determinar el conjunto B (se debe justificar la respuesta).

(CC5) [(c)] 2 puntos por escribir correctamente la fórmula de asignación de la función inversa $f^{-1} : B \longrightarrow A$.

Pregunta Nº2. Considere las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas a través de la siguientes asignaciones:

$$f(x) \doteq \begin{cases} \dfrac{x}{|x|-1} & \text{si } \ x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)\,; \\ \sqrt{1-x^2} & \text{si } \ x \in [-1,1]\,. \end{cases} \qquad g(x) \doteq \frac{1}{x}\,.$$

(a) [3 puntos] Determine una expresión para $f \circ g$, y luego determine el dominio de $f \circ g$.

(b) [3 puntos] Determine una expresión para $g \circ f$, y luego determine el dominio de $g \circ f$.

Solución.

(a) Conviene expresar la asignación de f de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|-1} & \text{si } \ |x| > 1\,; \\ \sqrt{1-x^2} & \text{si } \ |x| \leq 1\,. \end{cases}$$

Luego, para cualquier $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se tiene que:

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{|x|}-1} & \text{si } \ \dfrac{1}{|x|} > 1\,; \\ \sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2} & \text{si } \ \dfrac{1}{|x|} \leq 1\,. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\frac{|x|}{x}}{1-|x|} & \text{si } \ |x| < 1\,; \\ \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} & \text{si } \ |x| \geq 1\,. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} & \text{si } \ x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)\,; \\ -\dfrac{1}{1+x} & \text{si } \ -1 < x < 0\,; \\ \dfrac{1}{1-x} & \text{si } \ 0 < x < 1\,. \end{cases}$$

Por ende, $\mathrm{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Notemos que

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \{-1, 1\}\,.$$

Luego, podemos escribir

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} \dfrac{|x| - 1}{x} & \text{si } \ |x| > 1\,; \\ \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} & \text{si } \ |x| < 1\,. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{|x| - 1}{x} & \text{si } \ x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)\,; \\ \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} & \text{si } \ x \in (-1, 1)\,. \end{cases}$$

Por ende, $\mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº2.

(CC1) [(a)] 2 puntos por determinar correctamente una expresión para $f \circ g$.

(CC2) [(a)] 1 punto por determinar correctamente el dominio de $f \circ g$.

(CC3) [(b)] 2 puntos por determinar correctamente una expresión para $g \circ f$.

(CC4) [(b)] 1 punto por determinar correctamente el dominio de $g \circ f$.