Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Primer Semestre 2026

Introducción al Cálculo - MAT1107
Interrogación N°4

Pregunta Nº1. Determine el dominio, el recorrido y trace un gráfico cualitativo de cada una de las funciones definidas a continuación.

(a) [3 puntos]

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 - 1 & \text{si } x \leq -2\,; \\ x+1 & \text{si } -2 < x \leq 0\,; \\ \sqrt{1-x^2} & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$$

(b) [3 puntos] $g(x) = |x^2 - x - 1|$.

Solución.

(a) Dada la asignación de f, la única condición a imponer es que

$$1 - x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 1 \iff -1 \leq x \leq 1\,.$$

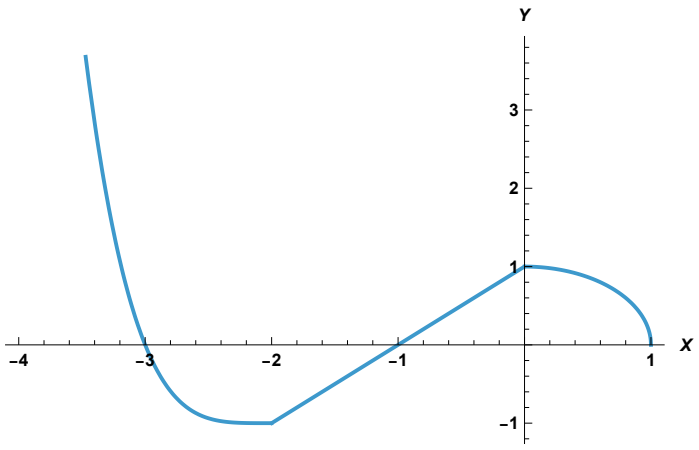
Por ende, el dominio de f resulta ser

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, 1]\,,$$

y podemos escribir

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 - 1 & \text{si } x \leq -2\,; \\ x+1 & \text{si } -2 < x \leq 0\,; \\ \sqrt{1-x^2} & \text{si } 0 < x \leq 1\,. \end{cases}$$

Recordando las propiedades de funciones conocidas (así como las transformaciones de funciones), obtenemos el siguiente gráfico cualitativo de f:



Observando el gráfico de f, deducimos que su recorrido es

$$\mathrm{Rec}(f) = [-1, +\infty)\,.$$

(b) Por simple inspección deducimos que el dominio de g es

$$\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}\,.$$

Resolviendo la ecuación cuadrática

$$g(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\},$$

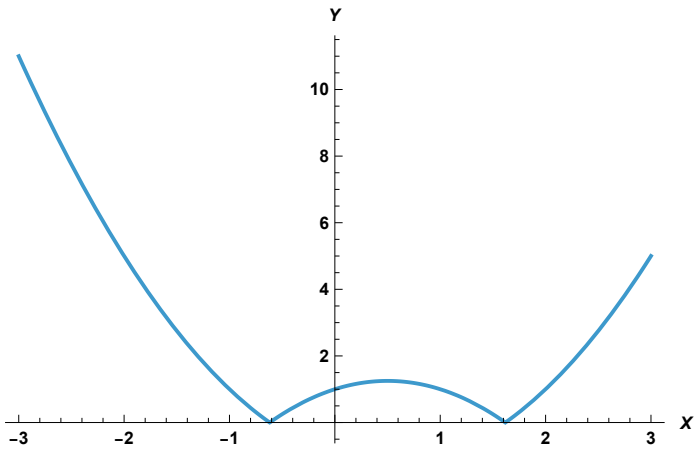
podemos escribir

$$g(x) = \left| \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \right| \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Por ende,

$$\begin{cases} g(x) > 0 & \text{si } \; x \in \left(-\infty, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty \right) ; \\ g(x) < 0 & \text{si } \; x \in \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right) . \end{cases}$$

Al ser g el valor absoluto de una función cuadrática, obtenemos el siguiente gráfico cualitativo:



Observando el gráfico de g, deducimos que su recorrido es

$$\mathrm{Rec}(g) = [0, +\infty)\,.$$

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº1.

(CC1) [(a)] 1 punto por determinar el dominio de f.

(CC2) [(a)] 1 punto por trazar el gráfico cualitativo de f. Se deben distinguir los puntos relevantes de dicho gráfico (por ejemplo, donde f cambia de asignación).

(CC3) [(a)] 1 punto por determinar, justificadamente, el recorrido de f (es suficiente que se justifique en base al gráfico de f).

(CC4) [(b)] 1 punto por determinar el dominio de g.

(CC5) [(b)] 1 punto por trazar el gráfico cualitativo de g. Se deben distinguir los puntos relevantes de dicho gráfico (por ejemplo, donde la función cuadrática $x^2 - x - 1$ cambia de signo).

(CC6) [(b)] 1 punto por determinar, justificadamente, el recorrido de g (es suficiente que se justifique en base al gráfico de g, aunque en este caso el recorrido también se deduce por simple inspección).

Pregunta Nº2. Considere la función definida a través de la siguiente asignación:

$$f(x) \doteq \sqrt{1 - \frac{1}{(1+x)^2}}\,.$$

(a) [3 puntos] Determine el dominio de f.

(b) [3 puntos] Determine el recorrido de f.

Solución.

(a) Inmediatamente notamos que $x = -1$ no pertenece al dominio de f. En tal caso,

$$f(x) = \sqrt{\frac{(1+x)^2 - 1}{(1+x)^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + 2x + 1 - 1}{(1+x)^2}} = \frac{\sqrt{x(x+2)}}{|x+1|} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\,.$$

Luego, debemos resolver la inecuación

$$x(x+2) \geq 0\,,$$

cuyo análisis admite dos posibilidades:
• $x \leq 0$ y $x + 2 \leq 0$, de donde resulta $x \leq -2$. Esto entrega el conjunto solución $\mathcal{S}_1 = (-\infty, -2]$.
• $x \geq 0$ y $x + 2 \geq 0$, de donde resulta $x \geq 0$. Esto entrega el conjunto solución $\mathcal{S}_2 = [0, +\infty)$.
Recordando que $x = -1$ no pertenece al dominio de f, deducimos que:

$$\mathrm{Dom}(f) = (\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2) \setminus \{-1\} = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)\,.$$

(b) Notemos que $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$. En efecto, al ser f la raíz cuadrada de una cierta expresión, inmediatamente obtenemos que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Por otra parte, dado que

$$1 - \frac{1}{(1+x)^2} \leq 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\,,$$

claramente sigue que $f(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Ahora bien, dado que $f(0) = 0$, sigue que $0 \in \mathrm{Rec}(f)$. Sin embargo, $y = 1$ no pertenece al recorrido de f; en efecto, supóngase que existe $x \in \mathrm{Dom}(f)$ tal que $f(x) = 1$. Elevando al cuadrado, esto implica que

$$1 - \frac{1}{(1+x)^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{(1+x)^2} = 0\,,$$

lo cual es absurdo. Se concluye que:

$$\mathrm{Rec}(f) = [0, 1)\,.$$

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº2.

(CC1) [(a)] 3 puntos por determinar correctamente el dominio de f (se debe justificar la respuesta).

(CC2) [(b)] 3 puntos por determinar correctamente el recorrido de f (se debe justificar la respuesta).