Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Primer Semestre 2026

Introducción al Cálculo - MAT1107
Interrogación N°3

Pregunta Nº1. Determine el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

(a) [3 puntos] $\dfrac{x}{x-1} \geq \dfrac{x-1}{x-2}$.

(b) [3 puntos] $\dfrac{x}{|x-1|} \geq \dfrac{|x-1|}{x-2}$.

Solución.

(a) Lo más conveniente es reordenar la desigualdad en el modo siguiente:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{x-1} \geq \frac{x-1}{x-2} \\ \iff & \frac{x}{x-1} - \frac{x-1}{x-2} \geq 0 \\ \iff & \frac{x(x-2)-(x-1)^2}{(x-1)(x-2)} \geq 0 \\ \iff & \frac{x^2-2x-(x^2-2x+1)}{(x-1)(x-2)} \geq 0 \\ \iff & \frac{1}{(x-1)(x-2)} \leq 0 \\ \iff & (x-1)(x-2) < 0\,. \end{aligned}$$

Por ende, $\mathcal{S} = (1,2)$.

(b) Notamos inmediatamente que $x = 1$ y $x = 2$ no pertenecen al conjunto solución. Además, al ser $x = 1$ el punto crítico de esta inecuación, analizamos cada caso por separado:
• Si $x < 1$, entonces $x - 1 < 0$. La inecuación resulta:

$$\frac{x}{-(x-1)} \geq \frac{-(x-1)}{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{x-1} \leq \frac{x-1}{x-2}\,,$$

que es la desigualdad complementaria a aquella del inciso (a). Luego, ponemos directamente

$$\mathcal{S}_1 = (-\infty,1) \cap ((-\infty,1) \cup (2,+\infty)) = (-\infty,1)\,.$$

• Si $x > 1$, entonces $x - 1 > 0$. La inecuación resulta:

$$\frac{x}{x-1} \geq \frac{x-1}{x-2}\,,$$

que es exactamente la desigualdad del inciso (a). Luego, ponemos directamente

$$\mathcal{S}_2 = (1, \infty) \cap (1, 2) = (1, 2)\,.$$

Se concluye que

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = (-\infty, 1) \cup (1, 2)\,.$$

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº1.

(CC1) [(a)] 3 puntos por hallar, en forma justificada, el conjunto solución $\mathcal{S}$ (no se exige que los alumnos resuelvan la inecuación siguiendo el método descrito en esta pauta).

(CC2) [(b)] 0.5 puntos por identificar a $x = 1$ como el punto crítico de la inecuación.

(CC3) [(b)] 1 punto por hallar, en forma justificada, el conjunto solución $\mathcal{S}_1$.

(CC4) [(b)] 1 punto por hallar, en forma justificada, el conjunto solución $\mathcal{S}_2$.

(CC5) [(b)] 0.5 puntos por escribir correctamente el conjunto solución final $\mathcal{S}$.

Pregunta Nº2. Determine el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{3-2x}{x^2-|2x-3|} \leq 0\,.$$

Solución. Notamos inmediatamente que $x = 3/2$ pertenece al conjunto solución. Además, al ser $x = 3/2$ el punto crítico de esta inecuación, analizamos cada caso por separado:

• Si $x < 3/2$, entonces $2x - 3 < 0$. La inecuación resulta:

$$\frac{3-2x}{x^2+2x-3} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3-2x}{(x+3)(x-1)} \leq 0\,,$$

de donde identificamos a $x = -3$ y $x = 1$ como ulteriores puntos críticos (además de $x = 3/2$). Por ende, se construye la siguiente tabla de signos:

	$(-\infty,-3)$	$(-3,1)$	$(1,\frac{3}{2})$
$3-2x$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
$\frac{3-2x}{(x+3)(x-1)}$	$+$	$-$	$+$

Luego, ponemos $\mathcal{S}_1 = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cap (-3,1) = (-3,1)$.

• Si $x > 3/2$, entonces $2x - 3 > 0$. La inecuación resulta:

$$\frac{3-2x}{x^2-(2x-3)} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3-2x}{x^2-2x+3} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3-2x \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \frac{3}{2}\,,$$

dado que $x^2 - 2x + 3 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (esto se deduce calculando el discriminante de la ecuación cuadrática $x^2 - 2x + 3 = 0$, que es $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$. En alternativa, basta observar que $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 \geq 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$). Luego, ponemos $\mathcal{S}_2 = \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

Recordando que $x = 3/2$ pertenece al conjunto solución, se concluye que

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \left\{\frac{3}{2}\right\} = (-3,1) \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)\,.$$

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº2.

(CC1) 1 punto por identificar a $x = 3/2$ como el punto crítico de la inecuación (perteneciente al conjunto solución).

(CC2) 2 puntos por hallar, en forma justificada, el conjunto solución $\mathcal{S}_1$.

(CC3) 2 puntos por hallar, en forma justificada, el conjunto solución $\mathcal{S}_2$.

(CC4) 1 punto por escribir correctamente el conjunto solución final $\mathcal{S}$.