Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Primer Semestre 2026

Introducción al Cálculo - MAT1107
Interrogación N°2

Pregunta Nº1. Utilizando las propiedades de orden de los números reales, demuestre que:

(a) [3 puntos] Para todo número real $x \in \mathbb{R}$ se tiene la desigualdad

$$\frac{x^2+x+1}{3} \geq x \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

(b) [3 puntos] Para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ números reales tales que $a > b$ y $c > d$, se tiene la desigualdad

$$(a+b)(c+d) < 2(ac+bd)\,.$$

Solución.

(a) Dado cualquier número real $x \in \mathbb{R}$, la desigualdad propuesta equivale a:

$$\frac{x^2+x+1}{3} \geq x \iff x^2+x+1 \geq 3x \iff x^2-2x+1 \geq 0 \iff (x-1)^2 \geq 0\,,$$

donde la última desigualdad es siempre válida (el cuadrado de cualquier número real siempre es un número mayor o igual a cero).

(b) Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ números reales tales que $a > b$ y $c > d$, debemos demostrar que

$$\begin{aligned} & 2(ac+bd)-(a+b)(c+d) > 0 \\ \iff & 2ac+2bd-ac-ad-bc-bd > 0 \\ \iff & ac+bd-ad-bc > 0 \\ \iff & a(c-d)+b(d-c) > 0 \\ \iff & a(c-d)-b(c-d) > 0 \\ \iff & (a-b)(c-d) > 0\,, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es verdadera bajo la hipótesis que $a > b$ y $c > d$, lo cual implica que $a-b > 0$, $c-d > 0$ y, finalmente, que $(a-b)(c-d) > 0$ (el producto entre números estrictamente positivos es también estrictamente positivo).

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº1.

(CC1) [(a)] 2.5 puntos por explicar claramente la equivalencia entre la desigualdad propuesta ($\frac{x^2+x+1}{3} \geq x$) y la desigualdad $(x-1)^2 \geq 0$.

(CC2) [(a)] 0.5 puntos por indicar claramente que $(x-1)^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(CC3) [(b)] 2.5 puntos por explicar claramente la equivalencia entre la desigualdad propuesta ($(a+b)(c+d) < 2(ac+bd)$) y la desigualdad $(a-b)(c-d) > 0$.

(CC4) [(b)] 0.5 puntos por indicar claramente que $(a-b)(c-d) > 0$ bajo las hipótesis del ejercicio.

Pregunta Nº2. Determine el conjunto solución de las siguientes ecuaciones e inecuaciones:

(a) [4 puntos] $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \dfrac{1}{7}$.

(b) [2 puntos] $|2x^2 + 9x + 4| \leq 0$.

Solución.

(a) Notamos inmediatamente que $x = 1$ y $x = -1$ no pertenecen al conjunto solución. Para $x \neq -1$, la ecuación puede escribirse equivalentemente como

$$7|x-1| = |x+1|\,.$$

Al ser $x = \pm 1$ los puntos críticos de esta ecuación, analizamos cada caso por separado:

• Si $x < -1$, entonces $x - 1 < -2$ y $x + 1 < 0$. La ecuación resulta:

$$-7(x-1) = -(x+1) \quad \Leftrightarrow \quad 7(x-1) = x+1 \quad \Leftrightarrow \quad 6x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{4}{3}\,,$$

lo cual es absurdo. Luego, ponemos $\mathcal{S}_1 = \emptyset$.

• Si $-1 < x < 1$, entonces $x - 1 < 0$ y $x + 1 > 0$. La ecuación resulta:

$$-7(x-1) = x+1 \quad \Leftrightarrow \quad -7x+7 = x+1 \quad \Leftrightarrow \quad 6 = 8x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{4}\,.$$

Luego, ponemos $\mathcal{S}_2 = \left\{\dfrac{3}{4}\right\}$.

• Si $x > 1$, entonces $x - 1 > 0$ y $x + 1 > 2$. La ecuación resulta:

$$7(x-1) = x+1 \quad \Leftrightarrow \quad 7x-7 = x+1 \quad \Leftrightarrow \quad 6x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{4}{3}\,.$$

Luego, ponemos $\mathcal{S}_3 = \left\{\dfrac{4}{3}\right\}$.

Se concluye que

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 = \left\{\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right\}\,.$$

(b) Dado que el valor absoluto de cualquier número real es siempre mayor o igual a cero, el conjunto solución corresponde simplemente a las raíces de la ecuación cuadrática $2x^2 + 9x + 4 = 0$. Sigue que

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81-32}}{4} = \frac{-9 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-9 \pm 7}{4}\,,$$

esto es,

$$\mathcal{S} = \left\{-4, -\frac{1}{2}\right\}\,.$$

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº2.

(CC1) [(a)] 0.5 puntos por identificar a $x = \pm 1$ como los puntos críticos de la ecuación.

(CC2) [(a)] 1 punto por hallar, en forma justificada, el conjunto solución $\mathcal{S}_1$.

(CC3) [(a)] 1 punto por hallar, en forma justificada, el conjunto solución $\mathcal{S}_2$.

(CC4) [(a)] 1 punto por hallar, en forma justificada, el conjunto solución $\mathcal{S}_3$.

(CC5) [(a)] 0.5 punto por escribir correctamente el conjunto solución final $\mathcal{S}$.

(CC3) [(b)] 1 punto por justificar que el conjunto solución corresponde a las raíces de la ecuación cuadrática $2x^2 + 9x + 4 = 0$.

(CC4) [(b)] 1 punto por resolver correctamente la ecuación cuadrática y entregar el conjunto solución $\mathcal{S}$.