Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Primer Semestre 2026

**Introducción al Cálculo - MAT1107**
**Interrogación N°1**

**Pregunta Nº1.** Considérese el polinomio $P(x) = 4x^6 + 2x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 3x - 1$.

(a) [1.5 puntos] Aplique el algoritmo de la división para dividir $P(x)$ por $2x-1$, indicando explícitamente el cociente y el resto.

(b) [1.5 puntos] Utilizando el Teorema del Resto, verifique que el resto obtenido en la división anterior es cero.

(c) [1.5 puntos] Determine, usando el Teorema del Factor, si $x+1$ es un factor del polinomio $P(x)$.

(d) [1.5 puntos] Demuestre que $2x^4 - 2x + 1$ también es un factor del polinomio $P(x)$ y entregue una factorización de $P(x)$ con tres factores.

**Solución.**

(a) Aplicando el algoritmo de la división (Regla de Ruffini), vemos que:

$$
\begin{array}{rl}
 & 4x^6 + 2x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 3x - 1 \quad : \quad 2x - 1 = 2x^5 + 2x^4 - 2x^2 - x + 1 \\
- & \underline{(4x^6 - 2x^5)} \\
 & 4x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 3x - 1 \\
- & \underline{(4x^5 - 2x^4)} \\
 & -4x^3 + 3x - 1 \\
- & \underline{(-4x^3 + 2x^2)} \\
 & -2x^2 + 3x - 1 \\
- & \underline{(-2x^2 + x)} \\
 & 2x - 1 \\
- & \underline{(2x - 1)} \\
 & 0
\end{array}
$$

Entonces, el cociente de la división es $Q(x) = 2x^5 + 2x^4 - 2x^2 - x + 1$ y el resto es 0.

(b) Por el Teorema del Resto, el resto obtenido al dividir $P(x)$ por $2x - 1 = 2(x - \frac{1}{2})$ es

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{2^6} + \frac{2}{2^5} - \frac{2}{2^4} - \frac{4}{2^3} + \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^3} + 1 - 1 = 0\,,$$

lo cual coincide con el resultado obtenido en el inciso (a).

(c) Por el Teorema del Factor, $x+1$ es factor de $P(x)$ si y solo si $-1$ es raíz de $P(x)$. En este caso, vemos que

$$P(-1) = 4(-1)^6 + 2(-1)^5 - 2(-1)^4 - 4(-1)^3 - 3 - 1 = 4 - 2 - 2 + 4 - 4 = 0\,.$$

Por ende, $-1$ es raíz de $P(x)$ y $x+1$ es factor de $P(x)$.

(d) Por los incisos (a) y (c) tenemos que $(2x-1)(x+1) = 2x^2 + x - 1$ es factor de $P(x)$. Realizando la división se tiene que

$$\begin{array}{rl} & 4x^6 + 2x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 3x - 1 \quad : \quad 2x^2 + x - 1 = 2x^4 - 2x + 1 \\ - & \underline{(4x^6 + 2x^5 - 2x^4)} \\ & -4x^3 + 3x - 1 \\ - & \underline{(-4x^3 - 2x^2 + 2x)} \\ & 2x^2 + x - 1 \\ - & \underline{(2x^2 + x - 1)} \\ & 0 \end{array}$$

Por lo tanto, obtenemos la siguiente factorización (con tres factores) de $P(x)$:

$$P(x) = (2x-1)(x+1)(2x^4 - 2x + 1).$$

**Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº1.**

(CC1) [(a)] 1.5 puntos por obtener el cociente y el resto de la división.

(CC2) [(b)] 1.5 puntos por verificar que el resto es cero usando el Teorema del Resto.

(CC3) [(c)] 1.5 puntos por verificar que $-1$ es raíz y concluir que $(x+1)$ es factor.

(CC4) [(d)] 1.5 puntos por demostrar (a través de la división de polinomios) que $2x^4 - 2x + 1$ es un factor de $P(x)$, y obtener la sucesiva factorización de $P(x)$.

**Pregunta Nº2.** Considérese el polinomio $P(a) = 4a^3 + 4a^2 - 19a + 6$.

(a) [1 punto] Verifique que $a = \frac{3}{2}$ es raíz de $P(a)$.

(b) [3 puntos] Aplique el algoritmo de la división para dividir $P(a)$ por $2a - 3$, indicando explícitamente el cociente y el resto.

(c) [2 puntos] Factorice completamente el polinomio $P(a)$.

**Solución.**

(a) Evaluamos directamente:

$$P\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4 \cdot 3^3}{2^3} + \frac{4 \cdot 3^2}{2^2} - \frac{19 \cdot 3}{2} + 6 = \frac{27}{2} + 9 - \frac{57}{2} + 6 = 0\,.$$

(b) Aplicando el algoritmo de la división (Regla de Ruffini), vemos que:

$$\begin{array}{rl} & 4a^3 + 4a^2 - 19a + 6 \quad : \quad 2a - 3 = 2a^2 + 5a - 2 \\ - & \underline{(4a^3 - 6a^2)} \\ & 10a^2 - 19a + 6 \\ - & \underline{(10a^2 - 15a)} \\ & -4a + 6 \\ - & \underline{(-4a + 6)} \\ & 0 \end{array}$$

Entonces, el cociente de la división es $Q(a) = 2a^2 + 5a - 2$ y el resto es $0$.

(c) En base al resultado del inciso (b), debemos determinar las raíces reales (en caso de que existan) del polinomio $Q(a)$. Para ello, resolvemos la ecuación cuadrática $Q(a) = 0$, cuyo discrimante es

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25 + 16 = 41\,.$$

Por ende, las dos soluciones reales de la ecuación $Q(a) = 0$ serán

$$\frac{-5 - \sqrt{41}}{4} \qquad \text{y} \qquad \frac{-5 + \sqrt{41}}{4}\,,$$

y así:

$$Q(a) = 2\left(a + \frac{5 + \sqrt{41}}{4}\right)\left(a + \frac{5 - \sqrt{41}}{4}\right) = \left(2a + \frac{5 + \sqrt{41}}{2}\right)\left(a + \frac{5 - \sqrt{41}}{4}\right)\,.$$

Esto nos permite factorizar completamente el polinomio $P(a)$, de la siguiente forma:

$$P(a) = (2a - 3)\left(2a + \frac{5 + \sqrt{41}}{2}\right)\left(a + \frac{5 - \sqrt{41}}{4}\right)\,.$$

**Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº2.**

(CC1) [(a)] 1 punto por evaluar correctamente $P(3/2)$.

(CC2) [(b)] 3 puntos por obtener el cociente y el resto de la división en base a la Regla de Ruffini.

(CC3) [(c)] 1 punto por calcular correctamente las raíces del polinomio $Q(a)$, y factorizarlo adecuadamente.

(CC4) [(c)] 1 punto por entregar la factorización completa de $P(a)$.