Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Primer Semestre 2026

Introducción al Cálculo - MAT1107
Examen

Pregunta Nº1. [6 puntos] Determine el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{||x|-|x-2||}{x^2-1} \leq 2\,.$$

Solución. Notamos inmediatamente que el intervalo $\mathcal{S}_0 = (-1,1)$ es sub-conjunto del conjunto solución, puesto que $x^2-1<0$ para todo $x \in (-1,1)$, y así:

$$\frac{||x|-|x-2||}{x^2-1} \leq 0 < 2 \qquad \forall x \in \mathcal{S}_0\,.$$

Por ende, debemos analizar el caso $x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ (notemos que $x=-1$ y $x=1$ no pertenecen al conjunto solución), siendo $x=2$ el punto crítico de la inecuación (perteneciente al conjunto solución).
• Si $x \in (-\infty,-1)$ entonces $x-2<-3$ y $x^2-1>0$; la inecuación queda:

$$\frac{|-x+x-2|}{x^2-1} \leq 2 \iff \frac{2}{x^2-1} \leq 2 \iff x^2 \geq 2 \iff x \in (-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},+\infty)\,.$$

Luego, ponemos

$$\mathcal{S}_1 = (-\infty,-1)\cap\left[(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},+\infty)\right] = (-\infty,-\sqrt{2}]\,.$$

• Si $x \in (1,2)$ entonces $x-2<0$ y $x^2-1>0$; la inecuación queda:

$$\frac{|x+x-2|}{x^2-1} \leq 2 \iff \frac{x-1}{x^2-1} \leq 1 \iff x+1 \geq 1 \iff x \in [0,+\infty)\,.$$

Luego, ponemos

$$\mathcal{S}_2 = (1,2)\cap[0,+\infty) = (1,2)\,.$$

• Si $x \in (2,+\infty)$ entonces $x-2>0$ y $x^2-1>0$; la inecuación queda:

$$\frac{|x-x+2|}{x^2-1} \leq 2 \iff \frac{2}{x^2-1} \leq 2 \iff x^2 \geq 2 \iff x \in (-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},+\infty)\,.$$

Luego, ponemos

$$\mathcal{S}_3 = (2,+\infty)\cap\left[(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},+\infty)\right] = (2,+\infty)\,.$$

Recordando que $x=2$ pertenece al conjunto solución, se concluye que

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0\cup\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2\cup\mathcal{S}_3\cup\{2\} = (-\infty,-\sqrt{2}]\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)\,.$$

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº1.

(CC1) 1 punto por identificar a $\mathcal{S}_0 = (-1, 1)$ como sub-conjunto del conjunto solución.

(CC2) 1 punto por identificar a $x = 2$ como el punto crítico de la inecuación (perteneciente al conjunto solución).

(CC3) 1 punto por hallar, en forma justificada, el conjunto solución $\mathcal{S}_1$.

(CC4) 1 punto por hallar, en forma justificada, el conjunto solución $\mathcal{S}_2$.

(CC5) 1 punto por hallar, en forma justificada, el conjunto solución $\mathcal{S}_3$.

(CC6) 1 punto por escribir correctamente el conjunto solución final $\mathcal{S}$.

Pregunta Nº2. Considere la función definida a través de la siguiente asignación:

$$f(x) = \frac{x}{|x|+1}\,.$$

(a) [1.5 puntos] Determine dominio, ceros y paridad de f.

(b) [1.5 puntos] Demuestre que f es estrictamente creciente en su dominio.

(c) [1.5 puntos] Demuestre que $-1 < f(x) < 1$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$.

(d) [1.5 puntos] Determine los dos mayores conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tales que $f : A \longrightarrow B$ resulta ser una función biyectiva. Además, determine la función inversa $f^{-1} : B \longrightarrow A$.

Solución.

(a) Dado que $|x| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se deduce que

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\,.$$

Además, para cualquier $x \in \mathrm{Dom}(f)$ se tiene que

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x}{|x|+1} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0\,,$$

con lo que $x = 0$ es el único cero de f. Finalmente, para cualquier $x \in \mathrm{Dom}(f)$ se tiene que

$$f(-x) = \frac{-x}{|-x|+1} = -\frac{x}{|x|+1} = -f(x)\,,$$

con lo que f es una función impar.

(b) Dado que f es una función impar, basta demostrar que f es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$. Para ello, sean $x, y > 0$ con $x > y$. Sigue que:

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{y} \quad \Longrightarrow \quad 1 + \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x+1}{x} < \frac{y+1}{y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{x+1} > \frac{y}{y+1}\,,$$

esto es, $f(x) > f(y)$.

(c) Dado cualquier $x \geq 0$, sigue que:

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \geq 0\,,$$

y además

$$f(x) = \frac{x}{x+1} < \frac{x+1}{x+1} = 1\,,$$

y así, $0 \leq f(x) < 1$ para todo $x \geq 0$. Por otra parte, dado $x < 0$, se tiene que $-x > 0$. Siendo f impar, sigue que:

$$0 \leq f(-x) < 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq -f(x) < 1 \quad \Longrightarrow \quad -1 < f(x) \leq 0\,.$$

En conclusión, $-1 < f(x) < 1$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$.

(d) Como f es estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$, ha de ser inyectiva en $\mathbb{R}$. Luego, debemos determinar el mayor conjunto $B \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f : \mathbb{R} \longrightarrow B$ resulta ser una función epiyectiva. En base a lo demostrado en el inciso (c), tomemos $y \in [0, 1)$ y hallemos $x \geq 0$ tal que

$$f(x) = y \iff \frac{x}{x+1} = y \iff x = \frac{y}{1-y} \geq 0\,.$$

Por su parte, tomemos $y \in (-1, 0)$ y hallemos $x < 0$ tal que

$$f(x) = y \iff \frac{x}{-x+1} = y \iff x = \frac{y}{1+y} < 0\,.$$

En conclusión, la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1)$ es epiyectiva, y entonces, biyectiva. Su inversa viene dada explícitamente por la fórmula:

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|} \qquad \forall y \in (-1, 1)\,.$$

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº2.

(CC1) [(a)] 0.5 puntos por determinar el dominio de f.

(CC2) [(a)] 0.5 puntos por demostrar que el único cero de f es $x = 0$.

(CC3) [(a)] 0.5 puntos por demostrar que f es impar.

(CC4) [(b)] 1.5 puntos por demostrar que f es estrictamente creciente en su dominio.

(CC5) [(c)] 1.5 puntos por demostrar que $-1 < f(x) < 1$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$.

(CC6) [(d)] 0.5 puntos por demostrar que f es inyectiva en $\mathbb{R}$.

(CC7) [(d)] 0.5 puntos por demostrar que $f : \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1)$ es epiyectiva.

(CC8) [(d)] 0.5 puntos por hallar la función inversa $f^{-1} : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Pregunta Nº3. Calcule los siguientes límites:

(a) [3 puntos] $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+1}{3+n^2}\right)^{n^2}$.

(b) [3 puntos] $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2-n+1}-2n}{n+1}$.

Solución.

(a) Para todo entero $n \geq 1$ se tiene lo siguiente:

$$\left(\frac{n^2+1}{3+n^2}\right)^{n^2} = \left(\frac{3+n^2-2}{3+n^2}\right)^{n^2} = \left(1+\frac{-2}{3+n^2}\right)^{n^2} = \left[\left(1+\frac{-2}{3+n^2}\right)^{3+n^2}\right]^{\frac{n^2}{3+n^2}}. \tag{E1}$$

Definamos $a_k \doteq 3+k^2$ para todo $k \geq 1$, de modo tal que $\lim_{k\to+\infty} a_k = +\infty$, y así:

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{-2}{a_k}\right)^{a_k} = \frac{1}{e^2}. \tag{E2}$$

Como $\lim_{k\to+\infty}\frac{k^2}{3+k^2} = 1$, por álgebra de límites se concluye que:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+1}{3+n^2}\right)^{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{a_n}\right)^{a_n}\right]^{\frac{n^2}{3+n^2}} = \frac{1}{e^2}.$$

(b) Para todo entero $n \geq 1$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{n^2-n+1}-2n}{n+1} &= \frac{\sqrt{n^2-n+1}-2n}{n+1}\cdot\frac{\sqrt{n^2-n+1}+2n}{\sqrt{n^2-n+1}+2n} \\
&= \frac{n^2-n+1-4n^2}{(n+1)(\sqrt{n^2-n+1}+2n)} \\
&= \frac{-3n^2-n+1}{n(n+1)\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+2\right)}\cdot\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{-3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+2\right)},
\end{aligned} \tag{E3}$$

de donde se deduce, por álgebra de límites, que:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2-n+1}-2n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{-3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+2\right)} = -1.$$

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº3.

(CC1) [(a)] 1 punto por re-escribir el límite propuesto en la forma (E1).

(CC2) [(a)] 1 punto por calcular el límite en (E2).

(CC3) [(a)] 1 punto por calcular correctamente el valor del límite propuesto, apelando al álgebra de límites.

(CC4) [(b)] 2 puntos por multiplicar la expresión $\dfrac{\sqrt{n^2-n+1}-2n}{n+1}$ por $\dfrac{\sqrt{n^2-n+1}+2n}{\sqrt{n^2-n+1}+2n}$, y posteriormente por $\dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}$, llegando a la expresión (E3).

(CC5) [(b)] 1 punto por calcular correctamente el límite propuesto, a partir de la expresión (E3).

Pregunta Nº4. Resuelva las siguientes ecuaciones en la variable $x \in \mathbb{R}$:

(a) [3 puntos] $e^x + e^{-x} = 3$.

(b) [3 puntos] $\log_x(a) + \log_{x^2}(b) = c$, siendo $a, b, c > 0$ tres números dados.

Solución.

(a) Para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene lo siguiente:

$$e^x + e^{-x} = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad (e^x + e^{-x})e^x = 3e^x \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2x} - 3e^x + 1 = 0\,.$$

Ponemos $y \doteq e^x$, con lo que la ecuación anterior queda:

$$y^2 - 3y + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y \in \left\{ \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right\},$$

es decir:

$$x \in \left\{ \ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right), \ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \right\}.$$

(b) Inmediatamente notamos que $x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$. En tal caso, re-escribimos la ecuación planteada de la siguiente manera:

$$\log_x(a) + \log_{x^2}(b) = c \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\ln(a)}{\ln(x)} + \frac{\ln(b)}{\ln(x^2)} = c \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\ln(a)}{\ln(x)} + \frac{\ln(b)}{2\ln(x)} = c\,,$$

por lo que

$$\ln(x) = \frac{1}{c}\left(\ln(a) + \frac{1}{2}\ln(b)\right) = \frac{1}{c}\ln\left(a\sqrt{b}\right) = \ln\left(\left(a\sqrt{b}\right)^{1/c}\right).$$

Dado que el logaritmo natural es una función inyectiva en $(0, +\infty)$, se concluye que:

$$x = \left(a\sqrt{b}\right)^{1/c}.$$

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº4.

(CC1) [(a)] 1 punto por multiplicar la ecuación propuesta por e^x y llegar a la identidad $e^{2x} - 3e^x + 1 = 0$.

(CC2) [(a)] 1 punto por introducir el cambio de variable $y = e^x$ y resolver correctamente la ecuación cuadrática $y^2 - 3y + 1 = 0$.

(CC3) [(a)] 1 punto por expresar correctamente el conjunto solución en la variable x.

(CC4) [(b)] 2 puntos por aplicar las propiedades del logaritmo y re-escribir la ecuación propuesta como $\ln(x) = \ln\left(\left(a\sqrt{b}\right)^{1/c}\right)$.

(CC5) [(b)] 1 punto por despejar el valor de x, apelando a la inyectividad del logaritmo natural.