Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
3 de Septiembre 2025

MAT1107 ⋆ Introducción al Cálculo

Pauta Interrogación 1

1. Enuncie los axiomas de orden de $\mathbb{R}$ (2 ptos.). Solo con los axiomas de orden y las propiedades de suma y producto en $\mathbb{R}$, demuestre rigurosamente que si $a < b$ entonces $a^3 < b^3$ (4 ptos).

   Solución:

   Los cuatro axiomas de orden (como lo vimos en clases) son:

   (i) Tricotomía: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que exactamente solo una de las siguientes aseveraciones es verdadera $a < b$ o $a = b$ o $a > b$.

   (ii) Transitividad: Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

   (iii) Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

   (iv) Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$.

   Para demostrar que $a < b \Rightarrow a^3 < b^3$,por axioma (i) de tricotomía, podemos separar en los siguientes casos.

   CASO 1: $a > 0$. Si $a > 0$, como $b > a$ el axioma (ii) implica que $b > 0$. Como $a > 0$ y $b > 0$ entonces, por el axioma (iv), multiplicar por a o por b preserva desigualdades. Ocuparemos esto repetidamente. Tenemos que

   $$\begin{aligned} a < b \quad &\Rightarrow \quad a \cdot a < a \cdot b \quad \wedge \quad b \cdot a < b \cdot b \quad \text{(axioma (iv), pues } a > 0 \text{ y } b > 0) \\ &\Rightarrow \quad a^2 < ab \quad \wedge \quad ab < b^2 \\ &\Rightarrow \quad a \cdot a^2 < a \cdot ab \quad \wedge \quad a \cdot ab < a \cdot b^2 \quad \wedge \quad b \cdot ab < b \cdot b^2 \quad \text{(axioma (iv))} \\ &\Rightarrow \quad a^3 < a^2 b \quad \wedge \quad a^2 b < ab^2 \quad \wedge \quad ab^2 < b^3. \end{aligned}$$

   Ocupando el axioma (ii), transitividad, dos veces, concluimos lo que se buscaba demostrar, que $a^3 < b^3$.

   CASO 2: $a = 0$. Si $a = 0$ entonces $b > a$ implica $b > 0$. Como $b > 0$ el axioma (iv) dice que multiplicar por b preserva desigualdades y por lo tanto

   $$b > 0 \quad \Rightarrow \quad b \cdot b > b \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad b \cdot b \cdot b > b \cdot b \cdot 0,$$

   (ocupamos en cada paso el axioma (iv)) es decir $b^3 > 0$. Como $a = 0$ entonces $a^3 = 0$, i.e. en este caso también concluimos $b^3 > a^3$.

   CASO 3: $a < 0$. Este caso lo podemos subdividir en tres subcasos, ocupando el axioma (i), tricotomía, pero ahora separando en los posibles valores de b.

SUBCASO 3.1: $a < 0$ y $b < 0$. Como también asumimos $a < b$, entonces

$$\begin{aligned} a < b \quad &\Rightarrow \quad (-b) < (-a) \quad \text{(axioma (iii) sumando } (-a-b) \text{ a ambos lados)} \\ a < 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 < (-a) \quad \text{(axioma (iii) sumando } (-a) \text{ a ambos lados)} \\ b < 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 < (-b) \quad \text{(axioma (iii) sumando } (-b) \text{ a ambos lados).} \end{aligned}$$

Es decir, tenemos que $(-b) < (-a)$ con $(-b) > 0$ y $(-a) > 0$. Podemos entonces ocupar directamente el resultado del CASO 1, para concluir que $(-b)^3 < (-a)^3$. Luego $-b^3 < -a^3$, sumando a ambos lados $(a^3 + b^3)$ (y y ocupando el axioma (iii)) obtenemos $a^3 < b^3$.

SUBCASO 3.2: $a < 0$ y $b = 0$. Si $a < 0$ entonces $(-a) > 0$ (axioma (iii)). Ocupando el axioma (iv), multiplicando dos veces por $(-a)$, concluimos que $(-a)^3 > 0$. Luego $-a^3 > 0$, sumando a^3 a ambos lados (aciona (iii)) obtenemos $a^3 < 0$. Mientras tanto, como $b = 0$ entonces $b^3 = 0$, y en este caso también obtenemos $a^3 < b^3$.

SUBCASO 3.3: $a < 0$ y $b > 0$. El argumento del SUBCASO 3.2 dice que como $a < 0$ entonces $a^3 < 0$. El argumento del CASO 2 dice que como $b > 0$ entonces $b^3 > 0$. Ocupando el axioma (ii) de transitividad concluimos que $a^3 < b^3$.

En resumen, independiente de los signos de a o b, en todos los casos concluimos que $a < b$ implica $a^3 < b^3$, completando así la demostración solicitada.

Puntaje:

Se asigna 0.5 ptos. por cada axioma enunciado correctamente.

Además, CASO 1 (1 pto.), CASO 2 (0.5 ptos), CASO 3.1 (1 pto.), caso 3.2 (0.5 ptos.), CASO 3.3 (1 pto).

2. Encuentre el conjunto solución de la siguiente inecuación, escribiendolo como intervalo o unión de intervalos.

$$\frac{1}{2x-1} + \frac{1}{x+2} \geq 1$$

Solución: Tenemos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{x+2} \geq 1 \\ \iff \quad & \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{x+2} - 1 \geq 0 \\ \iff \quad & \frac{(x+2) + (2x-1) - (2x-1)(x+2)}{(2x-1)(x+2)} \geq 0 \\ \iff \quad & \frac{3x + 1 - (2x^2 + 3x - 2)}{(2x-1)(x+2)} \geq 0 \\ \iff \quad & \frac{-(2x^2-3)}{(2x-1)(x+2)} \geq 0 \qquad / \cdot -\frac{1}{2} \\ \iff \quad & \frac{x^2 - 3/2}{(2x-1)(x+2)} \leq 0. \end{aligned}$$

Aquí se puede factorizar el numerador como suma por diferencia: $(x^2 - 3/2) = (x - \sqrt{3/2})(x + \sqrt{3/2})$, o se puede observar que

$$(x^2 - 3/2) \leq 0 \quad \iff \quad x^2 \leq 3/2 \quad \iff \quad -\sqrt{3/2} \leq x \leq \sqrt{3/2}.$$

Hacemos la tabla de signos, considerando que los puntos críticos son $-2, -\sqrt{3/2}, 1/2$ y $\sqrt{3/2}$:

		-2		$-\sqrt{3/2}$		$1/2$		$\sqrt{3/2}$	
$(x^2-3/2)$	+		+	0	-		-	0	+
$(x+2)$	-	0	+		+		+		+
$(2x-1)$	-		-		-	0	+		+
Total	+	X	-	0	+	X	-	0	+

Concluimos que el conjunto solución de la inecuación (donde Total ≤ 0) es

$$\left(-2, -\sqrt{3/2}\right] \cup \left(1/2, \sqrt{3/2}\right]$$

Puntaje: (1 pto.) por pasar todos los elementos hacia un mismo lado y juntarlos correctamente en una expresiíon de la forma $P(x)/Q(x) \geq 0$ con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios.

(1.5 ptos.) por encontrar los puntos críticos e intervalos de signos de $(x^2-3/2)$.

(1 pto.) por encontrar el puntos crítico e intervalos de signos de $(x+2)$.

(1 pto.) por encontrar el puntos crítico e intervalos de signos de $(2x-1)$

(1 pto.) por armar la tabla de signos e identificar el sino de la expresión completa, incluyendo lo que ocurre en los puntos críticos.

(0.5 ptos.) por escribir el conjunto solución correctamente.

3. Resuelva la inecuación

$$3 < |x+1| + |x-1|.$$

Solución: Tenemos que

$$\text{(i) } |x+1| = \begin{cases} -1-x & \text{si } x < -1 \\ x+1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}, \quad \text{mientras que} \quad \text{(ii) } |x-1| = \begin{cases} 1-x & \text{si } x < 1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

por lo que podemos estudiar la inecuación más simplemente al considerar los siguientes tres subdominios de $\mathbb{R}$.

CASO 1: Si $x < -1$. En ese caso,

$$3 < |x+1| + |x-1| \quad \Leftrightarrow \quad 3 < (-1-x) + (1-x) \quad \Leftrightarrow \quad 3 < -2x \quad \Leftrightarrow \quad x < -3/2,$$

y por lo tanto $(-\infty, -3/2) \cap (-\infty, -1) = (-\infty, -3/2)$ es una parte del conjunto solución de la inecuación.

CASO 2: Si $-1 \leq x < 1$. En ese caso,

$$3 < |x+1| + |x-1| \quad \Leftrightarrow \quad 3 < (x+1) + (1-x) \quad \Leftrightarrow \quad 3 < 2,$$

que es siempre falso. Por lo que no existen valores para $x \in [-1, 1)$ que resuelvan la inecuación

CASO 3: Si $1 \leq x$. En ese caso,

$$3 < |x+1| + |x-1| \quad \Leftrightarrow \quad 3 < (1+x) + (x-1) \quad \Leftrightarrow \quad 3 < 2x \quad \Leftrightarrow \quad x > 3/2,$$

y por lo tanto $(3/2,\infty)\cap[1,\infty)=(3/2,\infty)$ es otra parte del conjunto solución de la inecuación.

Entre los tres casoscubrimos todas las posibilidades para $x\in\mathbb{R}$, por lo que concluimos finalmente que x resuelve la inecuación, si y solo si $x\in(-\infty,-3/2)$ o si $x\in(3/2,\infty)$. Es decir, el conjunto solución de la inecuación es

$$(-\infty,-3/2)\cup(3/2,\infty)\,.$$

Puntaje: (1 pto.) por (i) y (ii) e identificar los puntos críticos donde los valores absolutos cambian de signo.

(1.5 pts.) por resolver correctamente cada uno de los casos 1,2 y 3.

(0.5 pts.) por finalmente considerar la uni'on de los conjuntos obtenidos en cada caso.

4. Resuelva la siguiente inecuación

$$\frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\sqrt{x}}\geq\sqrt{2}$$

Solución:

Para que la inecuación se pueda satisfacer, necesitaremos varias condiciones.

Primero. Necesitamos que $\sqrt{x}$ exista y no sea 0. Esto se traduce directamente a la condición $x>0$.

Segundo. Necesitamos que $\sqrt{x^2-5x+6}$ existan, es decir, neceistamos que $(x^2-5x+6)\geq 0$. Como $(x^2-5x+6)=(x-2)(x-3)$, entonces $(x^2-5x+6)\geq 0$ si y solo si $x\leq 2$ o $x\geq 3$ (mediante una tabla de signos).

Combinando las dos condiciones anteriores, para buscar soluciones a la inecuación nos debemos restringir a buscar soluciones dentro del conjunto $A=(0,2]\cup[3,\infty)$.

Restringiendonos entonces a considerar solo $x\in A$, ya tenemos que $x>0$ y $(x^2-5x+6)\geq 0$ (y $2>0$ también), y por lo tanto tenemos la equivalencia

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\sqrt{x}}\geq\sqrt{2}\\
\Leftrightarrow\quad&\left(\frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\sqrt{x}}\right)^2\geq\left(\sqrt{2}\right)^2\\
\Leftrightarrow\quad&\frac{x^2-5x+6}{x}\geq 2\\
\Leftrightarrow\quad&\frac{x^2-5x+6}{x}\geq 2\quad /\cdot x\quad\text{(ya estamos restringidos a } x>0)\\
\Leftrightarrow\quad&x^2-5x+6\geq 2x\\
\Leftrightarrow\quad&x^2-7x+6\geq 0\\
\Leftrightarrow\quad&(x-1)(x-6)\geq 0\\
\Leftrightarrow\quad&x\leq 1\text{ o }6\leq x.
\end{aligned}$$

donde el último paso se puede hacer con una tabla de signos.

Concluimos entonces que un $x\in(0,2]\cup[3,\infty)$ resuelve la inecuación, si y solo si x ademá está en el conjunto . $(-\infty,1]\cup[6,\infty)$ Imponiendo todas las condiciones concluimos que el conjunto solución de la inecuación es

$$(0,1]\cup[6,\infty).$$

Puntaje: (1 pto.) por observar que se necesita $x > 0$.

(1.5 ptos.) por observar que se necesita $(x^2 - 5x + 6) \geq 0$ y deducir que esto corresponde a $x \leq 2$ o $x \geq 3$.

(1 pto.)por formal el conjunto A y ver que, restringiendose a A, las expresiones son positivas y la inecuación se puede elevar al cuadrado manteneniendo equivalencia.

(1.5 pto.) por encontrar que en A la inecuación se resuelve para $x \leq 1$ o $x \geq 6$.

(1 ptos.) por tomar la intersección de los conjuntos impuestos por las distintas condiciones, obteniendo el conjunto solución $(0, 1] \cup [6, \infty)$.