Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
5 de Noviembre 2025

MAT1107 ⋆ Introducción al Cálculo

Interrogación 3

1. Calcule los siguientes límites justificando su respuesta con el teorema del sandwich o con álgebra de límites..

   (a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\cos(n^3+1)}{n}$.

   (b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3n^3+2n^2+n}{5n^3+8}$.

   (c) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n}$.

   Solución:

   (a) Como $|\cos(x)| \leq 1$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$, entonces

   $$\frac{-1}{n} \leq \frac{\cos(n^3+1)}{n} \leq \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1.$$

   Sabemos que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, y por lo tanto el teorema del sandwich nos permite concluir que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\cos(n^3+1)}{n} = 0$.

   (b) Como

   $$\frac{3n^3+2n^2+n}{5n^3+8} = \frac{3+2/n+1/n^2}{5+8/n^3},$$

   por álgebra de límites,

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+2n^2+n}{5n^3+8} = \frac{3+\lim_{n\to\infty}(2/n)+\lim_{n\to\infty}(1/n^2)}{5+\lim_{n\to\infty} 8/n^3} = \frac{3+0+0}{5+0} = \frac{3}{5}.$$

   (c) Como $2^n = (1+1)^n \geq 1+n+n(n-1)/2$ para todo $n \geq 0$ entonces

   $$0 \leq \frac{n}{2^n} \leq \frac{n}{1+n+n(n-1)/2} \leq \frac{2}{n-1}, \quad \forall n \geq 2.$$

   Sabemos que la sucesión constante cero converge a cero y que $2/(n+1)$ converge a cero, y por lo tanto, el teorema del sandwich nos permite concluir que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$.

   Puntaje:

(a) (1 punto) por acotar $-1 \leq \cos(n^2+1) \leq 1$ y
(1 punto) por ocupar bien el teorema del sandwich con $-1/n$ y $1/n$ como sucesiones que van a cero.

(b) (1 punto) por la factorización $\dfrac{3n^3+2n^2+n}{5n^3+8} = \dfrac{3+2/n+1/n^2}{5+8/n^3}$ y
(1 punto) por ocupar correctamente álgebra de límites con $1/n, 1/n^2$ y $1/n^3$ llendose a cero.

(c) (1 punto) por acotar $n/2^n$ de alguna manera similar a la pauta y (1 punto) por ocupar teorema del sandwich correctamente.

2. Demuestre por definición que $a_n = \sqrt{4+\dfrac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}$, satisface $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

Solución:

Tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
|a_n - 2| &= \left|\sqrt{4+\frac{1}{n}} - 2\right| \\
&= \left|(\sqrt{4+1/n} - 2)\cdot \frac{\sqrt{4+1/n}+2}{\sqrt{4+1/n}+2}\right| \\
&= \left|\frac{1}{n}\cdot \frac{1}{\sqrt{4+1/n}+2}\right| \\
&\leq \frac{1}{4n}.
\end{aligned}$$

Fijemos un $\epsilon > 0$. Escogiendo $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > 1/(4\epsilon) > 0$, que existe por el principio arquimediano, tenemos que $1/(4N) < \epsilon$ y entonces $\forall n \geq N$,

$$|a_n - 2| \leq \frac{1}{4n} \leq \frac{1}{4N} < \epsilon,$$

es decir, se cumple que $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N, |a_n - 2| < \epsilon$.

Puntaje:

- **(2 puntos) por la estimación $|a_n - 2| \leq 1/4n$ u otra estimación semejante y útil.**
- **(2 puntos) por dado $\epsilon > 0$ encontrar un $N \in \mathbb{N}$ adecuado, en base a la cota anterior (por ejemplo $N > 1/4\epsilon$ con la estimación de la pauta), mencionando que tal N existe por el principio arquimediano.**
- **(2 puntos) por verificar que con el N encontrado se cumple que $\forall n \geq N, |a_n - 2| < \epsilon$.**

3. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones convergentes. Sean $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ y $M = \lim_{n\to\infty} b_n$. Demuestre que la sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $c_n = a_n + b_n, n \in \mathbb{N}$, es convergente y $\lim_{n\to\infty} c_n = L + M$.

Solución:

Tenemos que

$$\forall \epsilon_1 > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1, |a_n - L| < \epsilon_1, \quad \text{y también}$$
$$\forall \epsilon_2 > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2, |b_n - M| < \epsilon_2,$$

y queremos demostrar que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, |c_n - (L+M)| < \epsilon.$$

Fijemos un $\epsilon > 0$. Considerando $\epsilon_1 = \epsilon/2$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < \epsilon/2$ para todo $n \geq N_1$.
Considerando $\epsilon_2 = \epsilon/2$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - L| < \epsilon/2$ para todo $n \geq N_2$.
Tomemos $N = \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$. Luego, si $n \geq N$ tenemos que $|a_n - L| < \epsilon/2$ y que $|b_n - L| < \epsilon/2$. Por desigualdad triangular del valor absoluto esto implica que

$$\begin{aligned} |c_n - (L+M)| =& |(a_n + b_n) - (L+M)| \\ =& |(a_n - L) + (b_n - M)| \\ \leq& |a_n - L| + |b_n - M| \\ <& \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon, \end{aligned}$$

es decir, para $\epsilon > 0$ encontramos $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple $|c_n - (L+M)| < \epsilon$. Esto demuestra que (c_n) es convergente y su límite es $(L+M)$.

Puntaje:

- **(1 punto) por aclarar (o que dentro del argumento se vea claramente) cual es la aseveración que se quiere demostrar.**
- **(1 punto) por escoger $\epsilon_1 = \epsilon/2$ y obtener N_1 (o lo que corresponda en el argumento del alumno).**
- **(1 punto) por escoger $\epsilon_2 = \epsilon/2$ y obtener N_2 (o lo que corresponda en el argumento del alumno).**
- **(1 punto) por escoger $N = \max\{N_1, N_2\}$.**
- **(2 puntos) por verificar que para $n \geq N$ se cumple $|c_n - (L+M)| < \epsilon$, ocupando correctamente la desigualdad triangular del valor absoluto.**

4. Considere la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente como

$$a_1 = -1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n^2 + 1}, \forall n \geq 1.$$

Demuestre que (a_n) es convergente y calcule su límite.
Indicación: Observe que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $x^2 + 1 \geq 1$.

Solución: Primero vemos que $a_1 = -1, a_2 = -1/2, a_3 = -2/5, a_4 = -10/29, ...$ por lo que (a_n) parece ser creciente y siempre negativa. Probemos eso.

(a) (Negativa) Demostremos por inducción que $a_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
Caso base: $a_1 = -1 < 0$ así que esta listo.
Paso inductivo: Supongamos que $a_n < 0$, como $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$, $a_n^2 + 1 > 0$ y por lo tanto $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{a_n^2+1}$ es el producto de un núero negativo y uno positivo, por lo que $a_{n+1} < 0$. $\square$

(b) (Creciente) Como $x^2+1 \geq 1$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $a_n^2+1 \geq 1 > 0$ y por lo tanto $\frac{1}{a_n^2+1} \leq 1$. Al multiplicar esta desigualdad por a_n, que es negaivo, se da vuelta la desigualdad y concluimos $a_n \cdot \frac{1}{a_n^2+1} \geq a_n$, es decir $a_{n+1} \geq a_n$. $\square$.

Demostramos que (a_n) es creciente (parte (b)), que $a_n \geq a_1 = -1, \forall n \in \mathbb{N}$ (parte (b)) y que $a_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$ (parte (a)). Es decir (a_n) es creciente y acotada. Por teorema de clases podemos asegurar que la sucesión (a_n) es convergente.

Para calcular el valor de $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ usaremos álgebra de límites en la realción de recurrencia.

Como $a_n \to L$, entonces $a_{n+1} \to L$. También tenemos, por álgebra de límites, que $(a_n^2+1) \to (L^2+1)$, que es distinto de cero (es mayor o igual a 1). Al tomar límite en la relación de recurrencia $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n^2+1}$ obtenemos (nuevamente por álgebra de límites) la ecuación

$$L = \frac{L}{L^2+1}.$$

Resolvemos la ecuación,

$$L = \frac{L}{L^2+1} \quad \Rightarrow \quad L^3 + L = L \quad \Rightarrow \quad L^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad L = 0,$$

y concluimos que $L = 0$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Puntaje:

- **(2 puntos) por demostrar que a_n es negativa (o acotada superiormente).**
- **(2 puntos) por demostrar que es creciente.**
- **(2 puntos) por encontrar el valor límite.**