Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
8 de Octubre 2025

MAT1107 ⋆ Introducción al Cálculo

Interrogación 2

1. Sea $a \in \mathbb{R}$ fijo y definamos $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + a}$. Encuentre lo más explícitamente posible el dominio maximal y el recorrido de f. Observación: estos conjuntos dependen del valor de a.

   Solución: El dominio de f es el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + a \geq 0\}$.

   Completando cuadrados observamos que

   $$x^2 + 2x + a = (x+1)^2 + (a-1),$$

   y para $a < 1$ las raíces distintas de $x^2 + 2x + a$ son $x_1 = -1 - \sqrt{1-a}$ y $x_2 = -1 + \sqrt{1-a}$. Si $a \geq 1$ entonces la cuadrática tiene una sola raíz o no tiene raíces y es siempre mayor o igual a 0. Esto también se puede concluir ocupando la fórmula de las raíces, el discriminante y el signo que tiene el coeficiente principal de la cuadrática.

   Con esto concluimos dos casos:

   (a) Si $a \geq 1$ entonces $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

   (b) So $a < 1$, entonces $x^2 + 2x + a \geq 0$ si $x \leq x_1$ o si $x \geq x_2$, es decir $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -1 - \sqrt{1-a}] \cup [-1 + \sqrt{1-a}, \infty)$.

   Para calcular el recorrido primero observamos que $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + a} \geq 0$ para cualquier x en el dominio de f. Por lo que el recorrido de f está contenido en $[0, \infty)$. Veamos ahora que valore $y \geq 0$ están efectivamente en el recorrido de f.

   $$\begin{aligned} y \geq 0 \wedge y \in \mathrm{Rec}(f) \quad &\Leftrightarrow \quad y \geq 0 \wedge \text{existe } x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ tal que } \sqrt{x^2 + 2x + a} = y \\ &\Leftrightarrow \quad y \geq 0 \wedge \text{existe } x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ tal que } x^2 + 2x + a = y^2 \\ &\Leftrightarrow \quad y \geq 0 \wedge \text{existe } x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ tal que } x^2 + 2x + a - y^2 = 0 \end{aligned}$$

   lo cual se cumple si y solo si (discriminante)

   $$y \geq 0 \quad \wedge \quad 4 - 4(a - y^2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \geq 0 \quad \wedge \quad y^2 \geq (a-1).$$

   Con esto concluimos dos casos:

   (a) Si $a \geq 1$ entonces $\mathrm{Rec}(f) = [\sqrt{a-1}, \infty)$.

   (b) Si $a < 1$, entonces $\mathrm{Rec}(f) = [0, \infty)$.

Una segunda manera de calcular el recorrido es observar que

(a) Si $a \geq 1$ entonces la cuadrática $(x+1)^2+(a-1)$ toma todos los valores mayores o iguales a $a-1$ al considerar $x \in \mathbb{R}$. Luego $f(x) = sqrt(x+1)^2 + (a-1)$ toma todos los valores mayores o iguales a $\sqrt{a-1}$ al variar $x \in \mathbb{R}$.

(b) Por otro lado, $a < 1$, entonces la cuadrática $(x+1)^2 + (a-1)$ toma todos los valores mayores o iguales a 0 al considerar todos los $x \in$Dom(f). Luego, al tomar raíz cuadrada, concluimos que f toma todos los valores mayores o iguales a 0.

Este segundo argumento también se puede presentar a travez del gráfico de la cuadrática y luego considerar que f es la raíz cuadrada de la cuadrática.

Puntaje:

(a) (1 pto.) por justificar que la cuadrática tiene una o ninguna raíz cuando $a > 1$.

(b) (1 pto.) por encontrar las dos raíces de la cuadrática cuando $a < 1$.

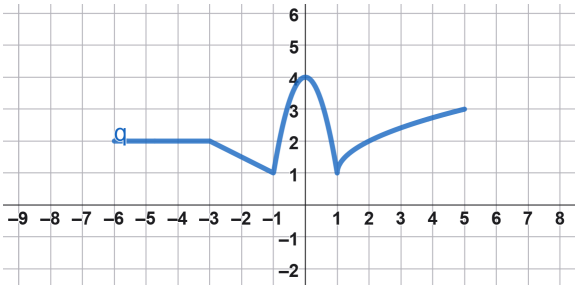
(c) (1 pto.) por justificar Dom$(f) = \mathbb{R}$ cuando $a \geq 1$.

(d) (1 pto.) por encontrar el Dom(f) cuando $a < 1$.

(e) (1 pto.) por encontrar que Rec$(f) = [\sqrt{a-1}, \infty)$ cuando $a \geq 1$.

(f) (1 pto.) por justificar que Rec$(f) = [0, \infty)$ cuando $a < 1$.

2. Dada la función f, cuyo gráfico está dado abajo, obtenga el gráfico de la función g dada por $g(x) = f(-2x-3) - 4$, indicando todas las transformaciones realizadas para obtenerlo. Indique suficientes puntos de referencia en la figura.



Solución: Escribiendo $g(x) = f(-2x-3) - 4 = f(-1 \cdot 2 \cdot (x+3/2)) - 4$ vemos que las transformaciones que corresponden hacer son:

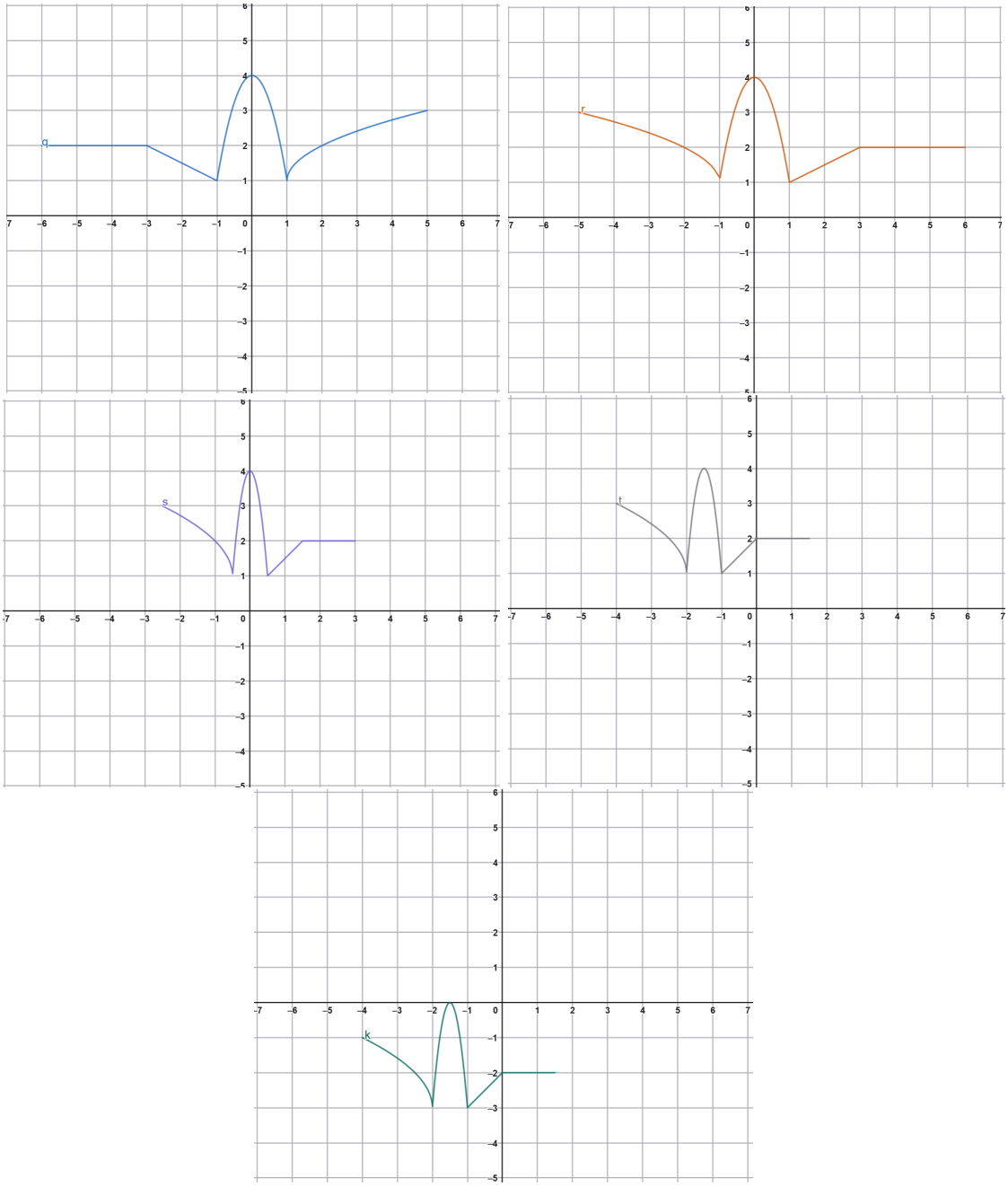
(a) Reflexión en la dirección horizontal (el -1 dentro del argumento)).

(b) Complesión horizontal a la mitad de ancho (el 2 dentro del argumento)

(c) Traslación horizontal en 3/2 hacia la izquierda (el +3/2 dentro del argumento)

(d) Traslación vertical de 4 hacia abajo (el -4 afuera de la función).

abajo se bosquejan los gráficos de estas transformaciones donde se pueden identificar las coordenadas de varios puntos relevantes.



Puntaje:

(a) **(1 pto.) por re-escribir** $f(-2x-3)-4 = f(-1\cdot 2\cdot(x+3/2))-4$ **o de alguna otra manera equivalente que permita identificar bien el orden de las transformaciones que se deben realizar**

(b) **(0.5 ptos.) por identificar la reflexión horizontal,**

(c) **(0.5 ptos.) por el gráfico de correspondiente a la reflexión horizontal,**

(d) (0.5 ptos.) por identificar la compresión horizontal,

(e) (0.5 ptos.) por el gráfico de correspondiente a la compresión horizontal,

(f) (0.5 ptos.) por identificar la traslación horizontal,

(g) (0.5 ptos.) por el gráfico de correspondiente a la traslación horizontal,

(h) (0.5 ptos.) por identificar la traslación vertical,

(i) (0.5 ptos.) por el gráfico de correspondiente a la traslación vertical,

(j) (1 pto.) por rastrear donde van a parar al menos tres puntos relevantes del gráfico original, después de todas las transformaciones.

3. Determine los ceros, signos y asíntotas (cuando existan) de la función racional $f(x) = \dfrac{x^2+2x-8}{x^2-4x+3}$. Luego bosqueje el gráfic de f ocupando (e indicando) toda la información anterior.

Solución: Al factorizar obtenemos

$$f(x) = \frac{(x+4)(x-2)}{(x-1)(x-3)}.$$

La tabla de signos es

		-4		1		2		3	
$(x+4)$	-	0	+		+		+		+
$(x-1)$	-		-	0	+		+		+
$(x-2)$	-		-		-	0	+		+
$(x-3)$	-		-		-		-	0	+
Total	+	0	-	X	+	0	-	X	+

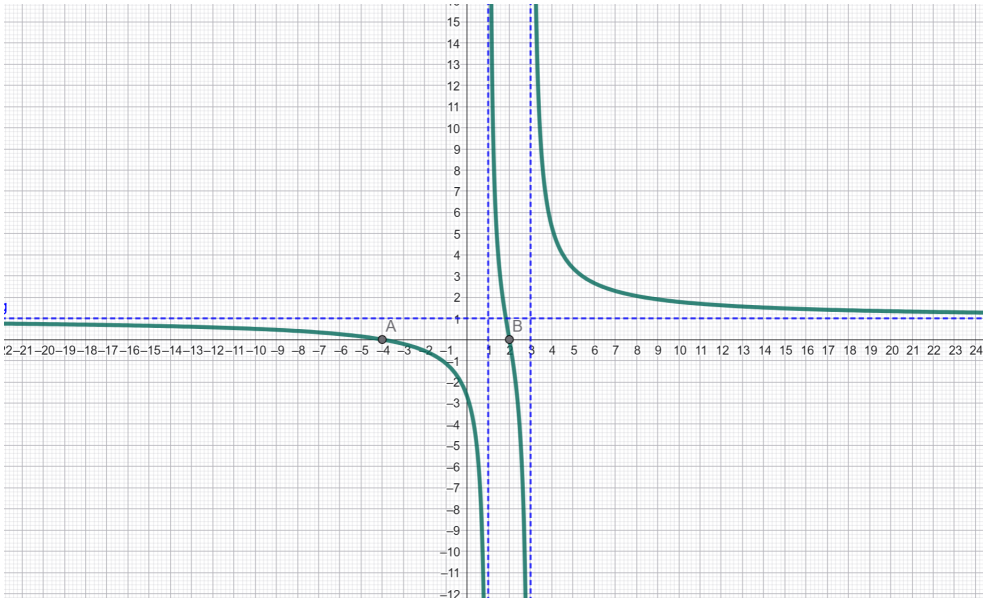
y obtenemos que f tiene ceros en $x = -4$ y $x = 2$, además de tener asíntotas verticales en $x = 1$ y $x = 3$.

Para estudiar las asíntotas horizontales observamos

$$f(x) = \frac{x^2+2x-8}{x^2-4x+3} = \frac{1+\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}$$

y cuando $|x| \to \infty$ obtenemos que $f(x) \approx 1$, es decir, f tiene asintotas horizontales en $+\infty$ y en $-\infty$ a altura $y = 1$.

Con todo lo anterior se puede realizar el siguiente bosquejo del gráfico de f



Puntaje:

(a) (1 pto.) por la factorización correcta en terminos lineales de la función racional f

(b) (1 pto.) por obtener correctamente los signos de los factores lineales.

(c) (0.5 ptos.) por identificar los ceros $x = -4$ y $x = 2$ de f.

(d) (0.5 ptos.) por identificar las asíntotas verticales en $x = 1$ y $x = 3$ de f

(e) (1 pto.) por identificar la asíntota horizontal a altura $y = 1$ de f

(f) (2 ptos.) por bosquejar el gráfico de f adecuadamente, y con todos los elementos anteriores identificados en el gráfico.

4. Sea $f(x) = \dfrac{3x-2}{3-2x}$. Encuentre A el dominio maximal de la función f y encuentre B el recorrido de f. Demuestre que $f : A \to B$ es inyectiva (por lo tanto biyectiva) y encuentre su función inversa. Justifique su respuesta.

Solución: La función f es una función racional, por lo que su dominio es todo $\mathbb{R}$ salvo donde el divisor se hace 0, es decir $A = \text{Dom}(f) = (-\infty, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$.

Para ver que f es inyectiva, supongamos que $x, z \in \text{Dom}(f)$ y $f(x) = f(z)$, entonces $x \neq 2/3$, también $z \neq 2/3$ y

$$\begin{aligned} f(x) = f(z) \quad &\Rightarrow \quad \frac{3x-2}{3-2x} = \frac{3z-2}{3-2z} \\ &\Rightarrow \quad (3x-2)(3-2z) = (3z-2)(3-2x) \\ &\Rightarrow \quad 9x - 6xz - 6 + 4z = 9z - 6zx - 6 + 4x \\ &\Rightarrow \quad 5x = 5z \\ &\Rightarrow \quad x = z, \end{aligned}$$

es decir, se demuestra que f es inyectiva.

Para encontrar el recorrido primero observamos que

$$f(x)+\frac{3}{2}=\frac{3x-2}{3-2x}+\frac{3}{2}=\frac{2(3x-2)+3(3-2x)}{2(3-2x)}=\frac{5}{6-4x}\neq 0 \quad \forall x\in \mathrm{Dom} f,$$

es decir f nunca toma el valor $-\frac{3}{2}$ y entonces $-\frac{3}{2}\notin \mathrm{Rec}(f)$.

Posteriormente observamos que

$$\begin{aligned}
y\in \mathrm{Rec} f \quad &\Leftrightarrow \quad y\neq -\frac{3}{2} \quad \wedge \quad \exists x\neq \frac{3}{2} \quad : \quad y=\frac{3x-2}{3-2x}\\
&\Leftrightarrow \quad y\neq -\frac{3}{2} \quad \wedge \quad \exists x\neq \frac{3}{2} \quad : \quad (3-2x)y=(3x-2)\\
&\Leftrightarrow \quad y\neq -\frac{3}{2} \quad \wedge \quad \exists x\neq \frac{3}{2} \quad : \quad -2xy-3x=-2-3y\\
&\Leftrightarrow \quad y\neq -\frac{3}{2} \quad \wedge \quad \exists x\neq \frac{3}{2} \quad : \quad x(2y+3)=(2+3y)\\
&\Leftrightarrow \quad y\neq -\frac{3}{2} \quad \wedge \quad \exists x\neq \frac{3}{2} \quad : \quad x=\frac{2+3y}{3+2y}=\frac{3}{2}-\frac{5}{6+4y},
\end{aligned}$$

pero la última expresión es distinta de $\frac{3}{2}$ para cualquier valor de y admisible, es decir, concluimos que $\mathrm{Rec}(f)=(-\infty,-\frac{3}{2})\cup(-\frac{3}{2},\infty)$.

Em el cálculo anterior también encontramos que

$$x\neq \frac{3}{2} \quad \wedge \quad f(x)=y \quad \Leftrightarrow \quad y\neq -\frac{3}{2} \quad \wedge \quad x=\frac{2+3y}{3+2y},$$

y por lo tanto $f^{-1}(y)=\frac{2+3y}{3+2y}$.

Puntaje:

(a) (1 pto.) por encontrar el dominio maximal.

(b) (2 ptos.) por demostrar la inyectividad.

(c) (1 pto.) por obtener que $-3/2$ no está en el recorrido de f.

(d) (1 pto.) por justificar que el recorrido de f es todo $\mathbb{R}$ salvo $\{-3/2\}$.

(e) (1 pto.) por obtener la expresión de la función inversa.