Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2025

Introducción al Cálculo - MAT1107
Interrogación N°8

1. Resuelva las siguientes ecuaciones

   a) $\ln(x-2)+\ln(x+2)=\ln(2x+11)$

   b) $e^{4x+2}-\dfrac{e^2}{e^{4x+2}}=e^2-1$

   Solución.

   a) Tenemos que

$$\begin{aligned}\ln(x-2)+\ln(x+2)=\ln(2x+11) &\iff \ln((x-2)(x+2))=\ln(2x+11)\\ &\iff (x-2)(x+2)=2x+11\\ &\iff x^2-2x-15=0\\ &\iff (x-5)(x+3)=0\\ &\iff (x=5)\vee(x=-3)\end{aligned}$$

   La solución $x=-3$ no es válida, debido a que al ser evaluada en la ecuación original obtenemos valores en donde la función logaritmo natural no está definida. Por lo tanto, la única solución de la ecuación es $x=5$.

   b) Haciendo el cambio de variables $u=e^{4x+2}$, obtenemos la ecuación

$$\begin{aligned}u-\frac{e^2}{u}=e^2-1 &\iff u^2-e^2=(e^2-1)u\\ &\iff u^2-(e^2-1)u-e^2=0\\ &\iff (u-e^2)(u+1)=0\\ &\iff (u=e^2)\vee(u=-1)\end{aligned}$$

   La solución $u=-1$ no es válida, debido a que $u=e^{4x+2}>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Luego, la única solución satisface

$$u=e^2\iff e^{4x+2}=e^2\iff 4x+2=2\iff x=0\,.$$

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1a).

CC 1. 1 punto por obtener la igualdad $\ln((x-2)(x+2)) = \ln(2x+11)$.

CC 2. 1 puntos por obtener la igualdad $(x-2)(x+2) = 2x+11$.

CC 3. 0.5 puntos por obtener las soluciones $x = 5$ y $x = -3$.

CC 4. 0.5 puntos por descartar la solución $x = -3$.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1b).

CC 1. 1 punto por hacer el cambio de variable $u = e^{4x+2}$ y obtener la ecuación $u - \frac{e^2}{u} = e^2 - 1$.

CC 2. 1 punto por resolver la ecuación cuadrática y obtener las soluciones $u = e^2$ y $u = -1$.

CC 3. 0,5 puntos por descartar la solución $u = -1$.

CC 4. 0,5 puntos por obtener la solución $x = 0$.

2. Si se introduce un cuerpo con una temperatura T_1 en un medio ambiente con una temperatura T_0, entonces después de t minutos el cuerpo se enfriará llegando a tener una temperatura T, donde

$$T(t) = T_0 + (T_1 - T_0) \cdot 10^{-kt}$$

la constante k depende del cuerpo en particular.

Un cuerpo con una temperatura inicial de 60° C se introduce en un medio ambiente de 30° C. Después de 12 minutos el cuerpo tiene una temperatura de 40°. ¿Cuál será la temperatura del cuerpo después de 24 minutos?

Solución. Tenemos que $T_1 = 60$ y $T_0 = 30$, luego el modela queda

$$T(t) = 30 + (60 - 30) \cdot 10^{-kt} = 30 + 30 \cdot 10^{-kt}$$

Por hipótesis, $T(12) = 40$ lo que equivale a

$$\begin{aligned} 30 + 30 \cdot 10^{-12k} = 40 &\iff 30 \cdot 10^{-12k} = 10 \\ &\iff 10^{-12k} = \frac{1}{3} \\ &\iff -12k = \log\left(\frac{1}{3}\right) \\ &\iff k = \frac{\log(3)}{12} \end{aligned}$$

El modelo nos queda $T(t) = 30 + 30 \cdot 10^{-\frac{\log(3)t}{12}}$ y la temperatura del cuerpo después de 24 minutos es

$$T(24) = 30 + 30 \cdot 10^{-2\log(3)} = 30 + 30 \cdot 10^{\log(3^{-2})} = 30 + 30 \cdot 3^{-2} = \frac{100}{3}\,.$$

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2.

CC 1. 1 punto por obtener el modelo $T(t) = 30 + 30 \cdot 10^{-kt}$.

CC 2. 1 punto por establecer la ecuación $T(12) = 40$.

CC 3. 1 punto por obtener la igualdad $10^{-12k} = \frac{1}{3}$.

CC 4. 1 puntos por obtener el valor de $k = \frac{\log(3)}{12}$.

CC 5. 1 puntos por evaluar la función T en 24.

CC 6. 1 punto por reducir la expresión $T(24)$ y obtener que $T(24) = \frac{100}{3}$.