Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2025

**Introducción al Cálculo - MAT1107**
**Interrogación N°7**

1. La sucesión $\{a_n\}$ se define con $a_1 = 1$ y

$$a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n} \quad \text{para } n \geqslant 1 \,.$$

a) Demuestre que $\{a_n\}$ es monótona creciente.

b) Demuestre que $\{a_n\}$ está acotada superiormente por 3.

c) Determine el valor de $\lim_{n\to\infty} a_n$.

**Solución.**

a) Veamos por inducción que $\{a_n\}$ es una sucesión creciente.
En efecto para $n = 1$ se tiene que $a_1 = 1$ y $a_2 = 3 - \frac{1}{a_1} = 2$ y es sencillo ver que $a_1 < a_2$.
Por la hipótesis inductiva $a_n < a_{n+1}$ entonces

$$\frac{1}{a_{n+1}} < \frac{1}{a_n} \iff -\frac{1}{a_n} < -\frac{1}{a_{n+1}} \iff 3 - \frac{1}{a_n} < 3 - \frac{1}{a_{n+1}} \iff a_{n+1} < a_{n+2} \,.$$

b) La sucesión $\{a_n\}$ está acotada superiormente por 3, es decir $a_n \leqslant 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por inducción sobre $n$, para $n = 1$ la desigualdad es claramente válida. Supongamos que $a_k \leqslant 3$ y demostremos que $a_{k+1} \leqslant 3$.
En efecto,

$$a_k \leqslant 3 \Longrightarrow \frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{a_k} \Longrightarrow -\frac{1}{a_k} \leqslant -\frac{1}{3} \Longrightarrow 3 - \frac{1}{a_k} \leqslant 3 - \frac{1}{3} \Longrightarrow a_{k+1} \leq 3 - \frac{1}{3} \leqslant 3 \,.$$

Por el principio de inducción, esto prueba que $a_n \leqslant 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

c) Ahora bien, como la sucesión $\{a_n\}$ es monótona creciente y acotada superiormente entonces la sucesión es convergente, digamos a $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Haciendo $n \to \infty$ en la fórmula recursiva de la sucesión, vemos que $L$ satisface

$$L = 3 - \frac{1}{L} \Longrightarrow L^2 = 3L - 1 \Longrightarrow L^2 - 3L + 1 = 0 \Longrightarrow L = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \,.$$

Como $L \geqslant 1$ entonces $L = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

**Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1.**

**CC 1.** 2 puntos por probar que $\{a_n\}$ es creciente.

**CC 2.** 2 puntos por probar que $\{a_n\}$ está acotada superiormente por 3.

**CC 3.** 2 puntos por determinar el valor de $\lim_{n\to\infty} a_n$.

2. Calcule los siguientes límites

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{5n}$

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+2^n}{5^n+2}$

**Solución.**

a) Tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{5n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2+1}{n+2}\right)^{5n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{5n}$$

Haciendo el cambio de variables $m = n+2$ obtenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{5n} &= \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{5(m-2)}\\ &= \lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{5}\cdot\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-10}\\ &= e^5\cdot 1 = e^5\,.\end{aligned}$$

b) Amplificando por $1/5^n$, obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+2^n}{5^n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n+2^n}{5^n+2}\cdot\frac{\frac{1}{5^n}}{\frac{1}{5^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^n}{5^n}+\frac{2^n}{5^n}}{\frac{5^n}{5^n}+\frac{2}{5^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+2\left(\frac{1}{5}\right)^n} = \frac{0+0}{1+2\cdot 0} = 0\,.$$

ya que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ si $|r|<1$.

**Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2.a)**

**CC 1.** 1 punto por obtener que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{5n}$

**CC 2.** 1 punto por realizar el cambio de variable $m = n+2$ y obtener que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{5(m-2)}$

**CC 3.** 1 punto por obtener el valor del límite buscado.

**Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2.a)**

**CC 4.** 1,5 puntos por amplificar por $1/5^n$

**CC 5.** 1,5 puntos por obtener el valor del límite.