Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2025

Introducción al Cálculo - MAT1107
Interrogación N°6

1. Calcule el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n+1}\,.$$

Solución. Amplificando por $1/n$ se obtiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n+1} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n}}{\frac{n+1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{\frac{n^2+1}{n^3}}}{n}}{\frac{n+1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{0}{1} = 0
\end{aligned}$$

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1.

CC 1. 2 puntos por amplificar la fracción por $1/n$.

CC 2. 2 puntos por ingresar n dentro de la raíz cúbica

CC 3. 2 puntos por determinar el límite.

2. Calcule el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+5n+6}-n)\,.$$

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+5n+6}-n) &= \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+5n+6}-n)\cdot\frac{(\sqrt{n^2+5n+6}+n)}{(\sqrt{n^2+5n+6}+n)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+5n+6})^2-n^2}{\sqrt{n^2+5n+6}+n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{5n+6}{\sqrt{n^2+5n+6}+n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{5n+6}{\sqrt{n^2+5n+6}+n}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{6}{n}}{\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}+1}\\
&= \frac{5}{\sqrt{1}+1}=\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2.

CC 1. 2 puntos por amplificar la fracción por $\sqrt{n^2+5n+6}+n$.

CC 2. 2 puntos por amplificar por $1/n$.

CC 3. 2 puntos por determinar el límite.

3. Demuestre, usando la definición de límite, que la sucesión $a_n = \dfrac{2n+3}{n+2}$ converge a $L = 2$.

Solución. Dado $\varepsilon > 0$ debemos encontrar N tal que si $n \geqslant N$, entonces

$$|a_n - L| = \left|\frac{2n+3}{n+2} - 2\right| = \left|\frac{2n+3-2(n+2)}{n+2}\right| = \left|\frac{-1}{n+2}\right| = \frac{1}{n+2}$$

debe ser menor que ε. Imponiendo la condición despejamos n.
Para que $\dfrac{1}{n+2} < \varepsilon$ es necesario y suficiente que $\dfrac{1}{\varepsilon} - 2 < n$.

Así, usando la propiedad arquimediana, dado el número $a = \dfrac{1}{\varepsilon} - 2$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \dfrac{1}{\varepsilon} - 2$, de modo que si $n \geqslant N$, entonces

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 2\,.$$

Despejando ε obtenemos que si $n \geqslant N$, entonces

$$\frac{1}{\varepsilon} < n + 2 \Longrightarrow \frac{1}{n+2} < \varepsilon \Longrightarrow |a_n - L| < \varepsilon\,.$$

Por lo tanto, hemos probado que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{n+2} = 2$.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 3.

CC 1. 2 puntos determinar $|a_n - L| = \frac{1}{n+2}$

CC 2. 2 puntos por utilizar la propiedad arquimediana, encontrando N.

CC 3. 2 puntos por concluir la demostración.