Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2025

Introducción al Cálculo - MAT1107
Interrogación N°5

1. Considere la función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B$ definida por

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x-3}{x+4}}\,.$$

a) Determine el mayor conjunto A en el cual f es inyectiva.

b) Determine el conjunto B para que f sea sobreyectiva.

c) Determine la inversa de f.

Solución.

a) Observe que las funciones $h(x) = \sqrt{x}$ y $\ell(x) = \dfrac{2x-3}{x+4}$ son inyectivas en sus dominios, luego $f = h \circ \ell$ es inyectiva en su dominio. Basta elegir $A = \mathrm{Dom}(f)$, se tiene que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \iff \left(\frac{2x-3}{x+4} \geqslant 0\right) \wedge (x \neq -4) \iff x \in (-\infty, -4) \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$$

Por lo tanto, $A = (-\infty, -4) \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$.

b) Se tiene que $B = \mathrm{Rec}(f)$. Basta con hallar el recorrido de la función f. Se tiene que

$$\begin{aligned}
y \in \mathrm{Rec}(f) &\iff (\exists\, x \in A)\,(y = f(x)) \\
&\iff (\exists\, x \in A)\left(y = \sqrt{\frac{2x-3}{x+4}}\right) \\
&\iff (\exists\, x \in A)\left(y^2 = \frac{2x-3}{x+4}\right) \wedge (y \geqslant 0) \\
&\iff (\exists\, x \in A)\left(xy^2 + 4y^2 = 2x - 3\right) \wedge (y \geqslant 0) \\
&\iff (\exists\, x \in A)\left(x(y^2-2) = -3 - 4y^2\right) \wedge (y \geqslant 0) \\
&\iff (\exists\, x \in A)\left(x = \frac{4y^2+3}{y^2-2}\right) \wedge (y \geqslant 0) \\
&\iff \left(x \neq -\sqrt{2}\right)\left(x \neq \sqrt{2}\right) \wedge (y \geqslant 0)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $B = [0, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$.

c) De lo realizado en el inciso b) se sigue que $f^{-1} : B \to A$ está definida por $f^{-1}(x) = \dfrac{4x^2+3}{2-y^2}$.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1.

CC 1. 2 puntos por determinar que $A = \text{Dom}(f) = (-\infty, -4) \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$.

CC 2. 2 puntos por determinar que $B = \text{Rec}(f) = [0, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$.

CC 3. 2 puntos por exhibir la inversa de f.

2. Sean

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \\ \dfrac{x}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt{x+2}\,.$$

a) Determine el dominio de $f \circ g$.

b) Determine una expresión para $(f \circ g)(x)$.

Solución.

a) Se tiene que

$$x \in \mathrm{Dom}(f \circ g) \iff (x \in \mathrm{Dom}(g)) \wedge (g(x) \in \mathrm{Dom}(f)) \iff (x \in [-2, \infty)) \wedge (g(x) \in \mathbb{R})$$

Luego, $\mathrm{Dom}(f \circ g) = [-2, \infty)$.

b) Notemos que

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 3g(x) - 2 & \text{si } g(x) \leqslant 1 \\ \\ \dfrac{g(x)}{g(x)-1} & \text{si } g(x) > 1 \end{cases}$$

- Rama 1:
$$g(x) \leqslant 1 \iff \sqrt{x+2} \leqslant 1 \iff x + 2 \leqslant 1 \iff x \leqslant -1$$
- Rama 2:
$$g(x) > 1 \iff \sqrt{x+2} > 1 \iff x + 2 > 1 \iff x > -1$$

Por lo tanto, obtenemos que

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 3\sqrt{x+2} - 2 & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant -1 \\ \\ \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2.

CC 1. 2 puntos por determinar el dominio de $f \circ g$.

CC 2. 2 puntos por obtener que $f(g(x)) == \begin{cases} 3g(x) - 2 & \text{si } g(x) \leqslant 1 \\ \\ \dfrac{g(x)}{g(x)-1} & \text{si } g(x) > 1 \end{cases}$.

CC 3. 2 puntos por resolver las condiciones de las ramas 1 y 2.