Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2025

Introducción al Cálculo - MAT1107
Interrogación N°4

1. La gráfica de la función $f(x) = -1 - \dfrac{1}{2-x}$ se obtiene a partir de la gráfica de $g(x) = \dfrac{1}{x}$ aplicando transformaciones de funciones.

   a) Identifique, en el orden que se aplican, las transformaciones que permiten obtener la gráfica de f a partir de la gráfica de g.

   b) Grafique cada una de estas transformaciones, identificando los puntos de intersección con los ejes coordenados.

   Solución.

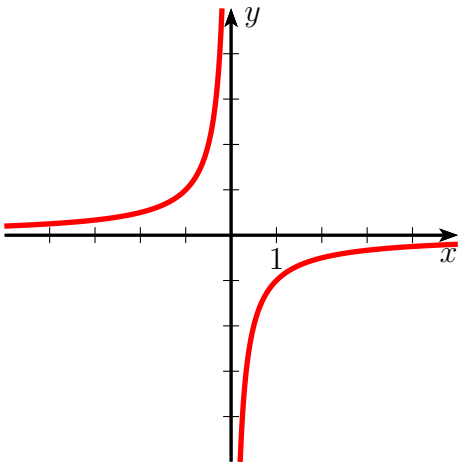
   a) Considere las siguientes tranformaciones

   $$\begin{aligned} T_1(x) &= g(-x) && \text{Reflexión eje } Y \\ T_2(x) &= -T_1(x) && \text{Reflexión eje } X \\ T_3(x) &= T_2(x-2) && \text{Traslación derecha} \\ T_4(x) &= T_3(x) - 1 && \text{Traslación abajo} \end{aligned}$$

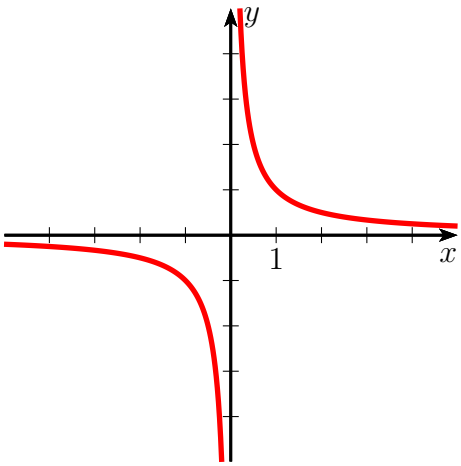
   Observe que

   $$T_4(x) = T_3(x) - 1 = T_2(x-2) - 1 = -T_1(x-2) - 1 = -g(-(x-2)) - 1 = -\frac{1}{-(x-2)} + 1 = f(x)\,.$$

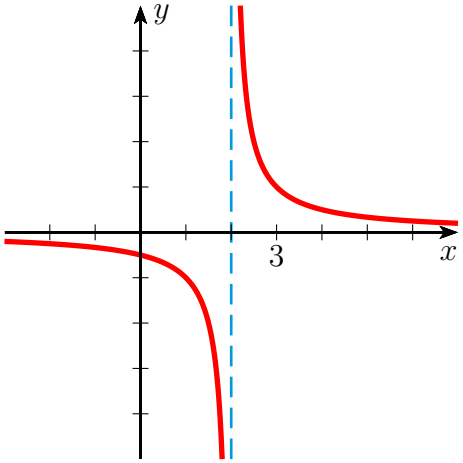
   b) La secuencia de gráficas es



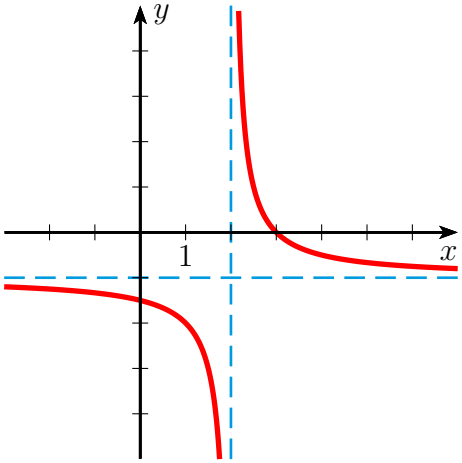
Gráfica de $y = T_1(x)$



Gráfica de $y = T_2(x)$



Gráfica de $y = T_3(x)$



Gráfica de $y = T_4(x)$

Otra forma: Note que $f(x) = -1 - \dfrac{1}{2-x} = \dfrac{1}{x-2} - 1$ por lo que las transformaciones requeridas son $T_3(x) = g(x-2)$ y $T_4(x) = T_3(x) - 1$.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1.

CC 1. 3 puntos por identificar las transformaciones requeridas.

CC 2. 3 puntos por trazar las gráficas de las transformaciones.

2. Considere la función racional $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 + 4x}$.

   a) Determine las asíntotas verticales de f.

   b) Determine las asíntotas horizontales, si existen, de f.

   c) Trace la gráfica de f.

   d) Determine si la función f es inyectiva. Justifique su respuesta.

Solución.

a) Notemos que

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 + 4x} = \frac{(x-4)(x+1)}{2x(x+2)}\,.$$

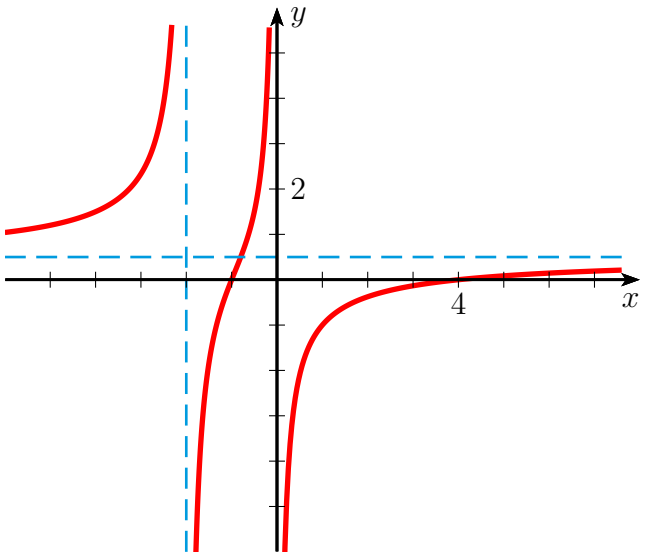
Las asíntotas verticales se presentan donde el denominador es 0, se sigue que $x = 0$ y $x = -2$ son asíntotas verticales de f.

b) Los grados del denominador y numerador son iguales, por lo que f tiene una asíntota horizontal en el cociente entre los coeficientes principales, es decir $y = \dfrac{1}{2}$.

c) Realizando una tabla de signos, podemos establecer el signo de la función f

	$-\infty$	-2	-1	0	4	∞
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	
$2x$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	
	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	

La gráfica de f es:



d) Por el test de la recta horizontal, vemos que f no es inyectiva.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2.

CC 1. 1,5 puntos por determinar las asíntotas verticales.

CC 2. 1,5 puntos por determinar la asíntota horizontal.

CC 3. 1,5 puntos por trazar la gráfica de f.

CC 4. 1,5 puntos por justificar mediante el test de la recta horizontal que f no es inyectiva.